Anleitung

zur

Cubik-Rechnung

und

zu deren Anwendung

auf

Körper-Ausmessungen,

von

C. L. Schübler.

17
391

Mit 2. Kupfer-Tafeln.

Stuttgart,
bei Franz Christian Löflund.
1816.

131767240

Staatliche
Bibliothek
Passau

Vorrede.

Es ist nichts schwüriger, als Theile aus einer Wissenschaft, wie die Mathematik ist, für Leser sehr verschiedener Art, welche zum grössern Theil nicht Gelehrte seyn sollen, auf eine genügende Weise zu lehren. Wenn das Buch vielerlei Belehrungen, die für das praktische Leben dienlich seyn sollen, enthalten soll, so wird man nicht fertig, die Voraussetzungen gehörig zu bestimmen, welche man bei dieser und jener Abhandlung seiner Schrift zu machen befugt sei. Hat man sich auf wenige Bogen beschränkt, so nimmt die Verlegenheit noch mehr zu, wenn man sich bemühet, daß die Angabe dessen, was jeder mitbringen soll, deutlich und genügend ausfalle.

In Beziehung auf mein Buch erlaube ich mir daher nur in Kürze folgende Punkte zu berühren:

1.) Man mus die Elemente der Arithmetik und auch die der Geometrie gefaßt haben, wenn man Cubik-Rechnung und ihre Anwendung auf Körper verstehen will. Genau, wie viel man schon gefaßt haben müsse, wie viel man schon gebildet seyn müsse, das getraue ich mir nicht mit wenigen Zeilen auszuführen. Wer gar kein gutes Buch in den erwähnten Fächern recht begriffen hat, dem ist schwer hiebei zu rathen. Es fehlt ja aber nicht an einem guten Vorrath hievon; dazu greiffe der Versäumte vor allem!

2.) Um vielen brauchbaren Meßkünstlern, welche der Rechnungsart der Logarithmen unkundig sind, keine Anstößigkeit zu geben, habe ich mich derselben in diesem Buch enthalten, und dieses auch bei Säzzen, wo ihre Anwendung sehr förderlich gewesen wäre. Nur in einigen Noten sind etliche Beispiele angeführt worden, um den Vortheil ihres Gebrauchs zu zeigen. Die Empfehlung der Logarithmen welche auf S. 136. eingeschaltet ist, wird doch wohl nicht übel aufgenommen werden können. Trigonometrie ist ebenfalls vermieden worden, um viele nicht abzuschrekken, welche

oft wichtige mathematische Lehrsäzze blos darinn umgehen, weil sie Ausdrükke von Sinus und Cosinus in den Vorträgen darüber wahrnehmen.

3.) Dem Vorurtheil, welches noch bei Vielen vorwaltend ist, als gehöre es zur eigentlich-praktischen Behandlung einer Wissenschaft, und zur Faßlichkeit der Lehren, die man dabei mittheilen will, daß

alles in wörtlichen Regeln ausgesprochen werde,

habe ich mich nicht fügen, noch so weit deshalb nachgeben können, daß ich die kurze Bezeichnung der Vorschriften mit Buchstaben aufgegeben hätte. Abrah. Kästner, Joh. Tob. Majer, und die erfahrensten Mathematiker haben sich wiederholt gegen die Zumuthungen der Unkundigen über diesen Gegenstand geäusſert. Man geräth in unabsehliche Weitläuffigkeiten, wenn man alle Regeln über Verhältnisse, Divisionen, Potenzirungen u. s. w. nur mit Worten aussprechen will, und wird dennoch dadurch dem Lehrling nicht deutlich. Selbst für das Gedächtnis ist nicht dadurch gesorgt, wenn man immer nur alle Formeln weg läßt.

Indessen wird man überall, wo es nothwendig war, in diesem Buch bei den gebrauchten Formeln auch ihren Sinn in Worten ausgedrükt finden, und uur bei Wiederholungen derselben auf die einmal gegebene Worterklärung zurükzugehen sich gefallen lassen.

4.) Es sind, etwa in der Mitte dieses Buchs, drei Methoden angegeben, wie man Cubik-Wurzeln ausziehen, oder, was eben so viel ist, dem Werth dieser Wurzeln sich nähern könne, (von S. 51. bis S. 91.) Die mittlere dieser Methoden findet sich, so viel ich weis, nirgends auf diese Weise ausgeführt. Das angewendete Hülfsmittel der Reihen leitet zu dem vorgesezten Zweck sehr sicher, und ohne verstekte Kunst. Analysis des Unendlichen ist ganz dabei vermieden, ob man gleich durch dieses Verfahren selbst ganz nahe an sie hin geführt wird. — Ich wünschte wohl, daß die erste Ansicht manche nicht abschreckte, sich dieses Hülfsmittels zu bedienen. Der Vorschlag, die Tabelle dieser Reihen weiter auszudehnen läßt sich leicht ausführen. Der, welcher es unternimmt, zwei mit den Zalen solcher Reihen gefüllte Quart-Blätter sich zu ver-

schaffen, wird wohl sehen, was er damit ausrichten, und welche Zeit er sich für alle Zukunft damit ersparen kann. Wer mit Logarithmen zu rechnen versteht, wird freilich diese Mühe scheuen, und immer lieber den S. 138. angegebenen Weg vorziehen. Wie vielen Cubik-Rechnern aber die Kenntnisse der Logarithmen fehlen, ist nur allzuwohl bekannt; und diesen möchte der erwähnte Rath immer sehr dienen.

5.) Ueber die Versuche, die Grundlinie eines Würfels geometrisch zu construiren, findet man Betrachtungen und Erörterungen, S. 114 bis S. 132, welche mehr für gelehrte Freunde der Mathematik, als für gemeine Meßkünstler, anziehend seyn möchten. Diese können also die angezeigten neun Blätter des Buchs größtentheils überschlagen. Sie ganz zu überschlagen, möchte ich ihnen doch nicht gerne zugestehen. Die Hauptsäzze für sich, auch ohne die beigefügten Beweise, enthalten etwas belehrendes, das, wie ich glaube, nicht ganz gemeiner Art, und des Nachdenkens wohl werth. Es ist nicht aus andern Büchern ausgeschrieben. Die Literatur in diesem Fach ist mir

ziemlich wohl bekannt; darum bitte ich gelehrte Mathematiker, welchen dieses mein Buch in die Hand fallen möchte, dem angeführten Abschnitt ihre Aufmerksamkeit doch zu schenken. Sollte jemand irgend eine andre Abhandlung nachweisen können, in welcher dieser Gegenstand ganz oder doch zum größten Theil auf diesem Weg schon von einem Geometer erörtert worden wäre, so würde ich ihm Dank dafür wissen, und die Vergleichung der Behandlungen dürfte doch wohl nicht unbelehrend ausfallen.

6.) Jeder gründliche Mathematiker liebt bei allen Säzzen, welche er vorträgt, die Beifügung ihrer Beweise. Ich habe sie in diesem Buch, wie ich meine, meistens gegeben, habe auch in allen meinen frühern Schriften mir angelegen seyn lassen, auf Beweisführung ausgesprochener Behauptungen immer zu dringen. In diesem Buch habe ich es manchmal unterlassen, die Beweise beizusezzen. Es geschah bei Säzzen, welche ich ihrer großen Brauchbarkeit wegen aus diesem Buch selbst nicht weglassen konnte, und deren Beweise man doch in sehr vielen, oft nicht theuern Büchern antrifft. Aber manche dieser Beweise schienen mir auch

mehr Raum zu erfordern, als in den wenigen Bogen vorräthig war, auf welche ich einmal aus guten Gründen meine Schrift eingeschränkt hatte. Manche erfordern auch selbst höhere Analysis, wenn sie bündig ausfallen sollen.

Noch habe ich beizufügen, daß die IIte Kupfertafel, welche zu diesem Buch gehört, einige Zeichnungen enthält, welche Fässer und Fässer-Berechnungen angehen. Die Abhandlung darüber wird in einer besondern Zugabe erscheinen.

Stuttgart,
den 10ten April 1816.

C. L. Schübler,
Kön. Würt. Ober-Regierungs-Rath.

Innhalt
des arithmetischen Theils dieses Buchs.

I. Uebersicht der wesentlichen Punkte, auf welche die wichtigsten Schwürigkeiten, die bei Cubik-Rechnungen, und in der Stereometrie vorkommen, sich zurükführen lassen. S. 1 bis S. 9.

II. Anweisung, die in Cubik-Rechnungen immer vorkommende drei Factoren, wenn es ganze Zalen mit angehängten Brüchen sind, auf zweierlei Art zu berechnen, 1) durch Reduktion auf meistens einfachere unächte Brüche 2) durch Umformung in Decimal-Ausdrükke. S. 9 — S. 13.

III. Beseitigung einiger Anstände über die Behandlung der vielen Zifern bei unendlichen Decimal-Brüchen. S. 13 — S. 18.

IV. Zuläßigkeit gewisser Abkürzungen bei den hiebei vorkommenden Multiplicationen; und Erlaubniß, manchmal durch Schlüsse gewissen Vermuthungen Raum zu geben. S. 19 — S. 21.

V. Darstellung des Verfahrens der ältern Arithmetiker, die Rechnungen dieser Art zu führen, zur Vergleichung mit dem Benehmen der Decimal-Rechner. S. 21 — 25.

VI. Ueber den Erfolg der Rechnung, wenn man, um die Behandlung der Brüche zu vermeiden, die den ganzen Factoren angehängten Brüche in kleine Theile, (wie die Brüche von Schuhen in bestimmte Zolle und Linien verwandelt). S. 25. — S. 28.

(NB. Man bemerke hiebei S. 25. die irrige Zahl in der Aufschrift VII. statt VI.

VII. Erklärung, wie es zugehe, daß die Weglassung unbedeutend-scheinender Brüche am Ende der Cubik-Rechnung oft auf bedeutende Abweichungen in den Schluß-Zahlen führe. S. 28 — S. 31.

VIII. Darlegung der Vortheile, welche die Anwendung der Decimalen auch bei Rechnungen, welche nicht zehntheiliges, sondern zwölftheiliges Maas angehen, gewährt S. 31 — S. 34.

IX. Hülfs-Mittel, alle Decimal-Brüche, welche vorkommen mögen, in bestimmte Cubik-Zolle, und Cubik-Linien des zwölftheiligen Maases jederzeit leicht zu verwandeln. S. 34 — S. 36.

X. Bestimmung des Unterschieds der Theile, wenn man einen Cubik-Schuh, dessen Grundlinie 12theilig, mit einem gleichgroßen, dessen Grundlinie 10theilig wäre, in Betrachtung nimmt, und diese Theile unter sich vergleicht. S. 36 — S. 42.

XI. Mittheilung der nothwendigsten Vorkenntnisse, um die Lehre von Irrational-Größen einzusehen; und Gebrauch davon, mit Vorlegung bei Quadrat- und Cubik-Wurzeln Ausdrükke derselben in Decimalen für die Wurzeln der Zahlen von 1 bis 10. S. 42 — S. 51.

XII. Erklärung der gemein-üblichsten Weise, die Cubik-Wurzeln aus Zahlen aller Art auszuziehen. S 51 — S. 59.

XIII. Vorschlag einer andern Methode, mittelst Aufstellung gewisser Reihen von Brüchen, wenn solche in Decimalen verwandelt worden, die Größe der Cubik-Wurzeln zu erforschen. S. 59 — S. 67.

XIV. Beseitignng einiger Zweifel über die Anwendbarkeit dieser Methode. S. 67 — S. 76.

XV. Auflösung derselben Aufgabe, durch Anwendung einer von Isak Newton erfundenen allgemeinen Methode, sich den Wurzeln aller Zahl-Größen, so weit man will, zu nähern. S. 76 — S. 91.

Innhalt
des geometrischen und stereometrischen Theils.

XVI. Anweisung, eine Diagonal-Linie zu berechnen, welche in einem gegebenen Würfel (dessen Grundlinie AE = 1 wäre) von einem untern Winkel-Punkt durch die Mitte des Würfels quer hinauf in den obern Winkel-Punkt läufft. S. 92 — S. 94.

XVII. Vergleichung des ersten Würfels, (des Fundamental-Würfels bei der Annahme AE = 1) mit dem, welchen man auf der in ihm befindlichen gedachten Querlinie annehmen kann. S. 94 und 95.

XVIII. Vergleichung des ersten Würfels mit einem, welchem nur ein Stück der gedachten Querlinie zur Grundlinie diente. S. 95 und 96.

XIX. Betrachtung einer stetigen Reihe von Würfeln, deren Grundlinien die Länge der Querfäden hätten, de-

ren ersten man aus XVI. kennt, und den Zweiten, als den Cubus des gedachten ersten Querfadens.
S. 96 — S. 102.

XX. Vergleichung der bekannten Reihe von Würfeln von den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . . . mit den stetigen Reihen. S. 102 — S. 104.

XXI. Belehrung, wie sich eine nach vorhergegangener Vorschrift gefertigte stetige Reihe benützen lasse, um die Grundlinien für Würfel zu bestimmen, deren Größen in der gedachten Reihe selbst nicht vorkommen.
S. 104 — S. 110.

XXII. Wie sich eine vorgegebene Linie jederzeit so weit erstrekken lasse, daß dadurch die verlängerte Linie die Größe einer frei-gewählten Cubik-Wurzel dem Auge darstelle? S. 110 — S. 114.

XXIII. Erläuterung darüber, warum man nicht zu jeder Cubik-Wurzel eine Linie geometrisch so construiren können, wie man zu jeder Qu. Wurzel aus Gründen der Elementar-Geometrie allemal eine construiren kann.
S. 114. — S. 126.

XXIV. Fortsezzung dieser Erläuterung, und Ausführung, wie sich die Grundlinie des Würfels in gewissen Fällen, darstelle, wenn die 3 Dimensionen in einem Parallelepipedum, dessen Innhalt dem des Würfels gleich ist, gegeben sind. S. 126 — S. 133.

XXV. Ueber die Berechnung senkrecht stehender Körper, deren Grundflächen nicht blos recht winklicht, und vierekkicht sind, sondern rauten-förmig, oder auch von mehreren Seiten.
Dabei allgemeine 1) Betrachtungen über den regelmäßigen Gang zu jeder Cubatur.

2) Ueber den Vortheil, wenn man Logarithmen anwendet, bei allen cubischen Rechnungen.
S. 133 — S. 139.

XXVI. Anweisung, Pyramiden zu berechnen, bei der Annahme einer Grundfläche von drei Seiten, und alsdenn auch von mehreren. S. 139 — S. 143.

XXVII. Anweisung, walzenförmige Körper, oder Cylinder zu berechnen; (mit einigen besondern Zurechtweisungen über die Berechnung der Kreis-Flächen).
S. 143 — S. 151.

Dabei Angaben des Gehalts einiger Fruchtmaaße.

XXVIII. Anweisung, den geradstehenden Kegel, (Conus) zu berechnen; auch den abgekürzten Kegel.
S. 151 — S. 155.

XXIX. Anweisung, bauchichte Körper zu berechnen, bei der Annahme circulärer, und auch elliptischer Krümmung.
S. 155 —. S. 163.

XXX. Anweisung, den Innhalt von Gewölben verschiedener Art zu bestimmen, und sie cubisch zu berechnen.
S. 163 — S. 167.

Nachtrag; eine Anzeige etlicher Irrthümer in Schriften über Maasvergleichungen enthaltend. S. 168 — S. 170.

Kurze Vorbereitung zu den nachfolgenden Fragen.

Die Kunst, reguläre vierekigte Körper auszumessen, und ihren Innhalt zu berechnen, (*) scheint sehr einfach, leicht zu übersehen und leicht auszuführen zu seyn. Man mißt die Länge, die Breite und die Höhe eines solchen uns vorgegebenen Körpers, schreibt die Zahlen auf, sieht die drei damit erhaltene Faktoren an, multiplicirt zuerst zwei mit einander, alsdenn das Produkt dieser zwei, mit dem dritten Faktor. Was alsdenn herauskommt, ist der verlangte Cubik-Innhalt des Körpers.

So wenig Schwierigkeit bei dieser Vorstellung obzuwalten scheint, so liegt doch nicht geringe gleichsam im Hintergrund, wenn es auf die wirkliche Ausübung der gedachten Kunst ankommt. Eine Menge von Praktikern verirren sich bei diesem Calkul; beginnen zwar mit Muth, werden aber bald müde,

(*) Kunst, — hier das Wort in weiterem Sinn genommen, begreift auch wissenschaftliche Einsicht unter sich. Dieses gilt auch bei den Worten: Rechenkunst, Meßkunst u. a. m.

suchen in Büchern Rath, und finden diesen selten darinn, oder wissen ihn nicht zu benüzzen; und lassen sehr oft muthlos das ganze Geschäft liegen, oder vertrauen es einem Dritten an, der mit bessern Kenntnissen versehen ist, — für sie zu rechnen.

1ste Frage.

Lassen sich die Schwierigkeiten nicht in kurze Punkte zusammen stellen, und deutlich dasjenige zur Uebersicht brtngen, was so viele hindert, in Cubik-Rechnung und Stereometrie mit gutem Erfolg zu arbeiten?

Antwort. Die wesentlichen Schwierigkeiten lassen sich wohl in sechs Säzze zusammenziehen:

1) Die drei Faktoren, welche bei Berechnung des Innhalts der Körper immer vorkommen, bestehen selten aus ganzen bequemen Zahlen allein, sondern es sind

Ganze mit angehängten Brüchen, und in der Multiplikation gemischter Brüche sind viele Praktiker nicht gehörig geübt.

Z. B. wenn vorkommt:

(Länge) . (Breite) . (Höhe). alles in Schuhen;
$4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 5\frac{7}{12}$ (wo die Pnnkte mit dem Wort mal auszusprechen sind)

so ist das Produkt $94\frac{21}{96}$ Quadrat-Schuhe; oder (reducirt) $94\frac{7}{32}$. Man erhält die lezte Zahl leicht und unverzüglich, wenn man die 3 Faktoren nur sogleich so zusammen stellt:

$$\frac{9}{2} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{67}{12}$$

und bemerkt, welche Zahlen im Zähler und Nenner sich heben. Es ist $\frac{3}{3}$ in 15 u. 12; und man sezt deshalb:

$$\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{67}{4}\right) \text{ ist} = \frac{45\cdot 67}{32}, \text{ welches } \frac{3015}{32}$$

und alsdann $94\frac{7}{32}$ ausgiebt.

Dieses Beispiel ist freilich sehr leicht, und wird viele nicht aufhalten. Aber für die Faktoren, welche hier gewählt worden sind, werden auch wohl meistens in der Anwendung andre, die mehr zusammengesezt sind, vorkommen, welche den nicht gut-gewandten Arithmetiker gewiß mehr beschäftigen werden.

2) Die Nacharbeit, welche bei solchen Säzzen fast jederzeit vorkommt, ist öfters noch beschwerlicher, als die erste Arbeit selbst. Nehmlich, wenn man nun weiß, daß der vorliegende Körper, wie in dem Beispiel $= 94\frac{7}{32}$ Cub. Schuhe betrage, so will man alsdenn näher wissen, wie viel der angehängte Bruch ($\frac{7}{32}$) in Cubik-Zollen ausmache? Und hier tritt die Nacharbeit ein. In dem gewählten Beispiel fällt sie ebenfalls leicht aus. Wenn das Mas 12theilig ist, so weiß man, daß 1728 Cubik-Zoll einen Cubik-Schuh ausmachen; man denkt also, wie folgt:

$$\frac{7}{32} \text{ Cub. Schuh ist} = \left(\frac{7\cdot 1728}{32}\right) \text{ Cub. Zolle.}$$

Und da hier 1728 durch den Divisor eben rein sich theilen läßt, so daß $\left(\frac{7\cdot 1728}{32}\right)$ so viel als $(7\cdot 54)$ be-

trägt, so ist freilich der Erfolg erwünscht, und recht bequem; man gelangt damit zu dem Ausspruch:

$\frac{7}{32}$ Cub. Schuh sind $= (7 \cdot 54)$ oder 378 Cub. Zolle. Womit man nun befriedigt ist!

Der Calkul würde viel beschwerlicher zu Ende gebracht werden, wenn nur einer der 3 Factoren eine andere Zahl gewesen wäre; z. B. wenn die Aufgabe der Factoren geheissen hätte:

$$(4\tfrac{3}{8}) \cdot (3\tfrac{3}{4}) \cdot (5\tfrac{7}{11})$$

Wenn wir überall in der Jugend gute Anleitungen erhielten, um in dem Aufheben der Factoren immer recht gewandt zu werden, so würden diese beeden Schwürigkeiten kaum des Anführens werth seyn. Es ist ein wesentlicher Theil der ganz gemeinen Arithmetik — Dabei wollen wir uns daher jezt nicht länger mehr aufhalten.

3) In grössere Verlegenheit versezt die meisten Praktiker die Erfordernis,

stereometrische Rechnungen mit Decimalen zu führen.

Die neuern Vorschriften beinahe in allen Provinzen Deutschlands bringen es jezt so mit sich, daß der Geometer und Baukünstler geschikt seyn soll, jede ihm vorkommende Rechnung auf zweierlei Art zu führen,

auf gemeine alt-übliche Weise, und nach der neuern Art, mit Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimal-Brüche,

so daß alles mit Decimal-Ausdrükken behandelt werde.

Der Praktiker, welcher dieses Geschäft nicht versteht, wird

oft einem andern Rechner nicht nachzurechnen wissen,

und oft seine eigenen Calkuls keinen leichten Proben unterwerfen können.

Ueberhaupt wird er nicht geschikt seyn, in erforderten Berichten schikliche Auskunft in der rechtlichen Kunstsprache zu geben, und wenn er durch Angaben der Näherung (was so sehr oft nothwendig ist) sich verständlich machen soll, so wird es ihm an dem sichersten Hülfsmittel, sich kurz und leicht vernehmlich zu machen, fehlen.

Als ein Beispiel lege man sich die Aufgabe vor:

die Factoren: $(4\frac{3}{8}) \cdot (3\frac{3}{4}) \cdot (5\frac{7}{12})$

im Decimal-Ausdruk $(4{,}375) \cdot (3{,}75) \cdot (5{,}58333)$ zu berechnen. (*)

4) Die Unkunde mit Irrational-Größen geschikt umzugehen, und dieselben, als Factoren, mit Brüchen gewöhnlicher Zahlen in Verbindung zu sezzen, und recht zu behandeln, beängstiget auch manche Rechner. Und doch läßt sich die Kenntniß dieser Größen, und das Verfahren damit sehr oft gar nicht umgehen, ohne daß man in ermüdende Weitläuftigkeiten sich verwikkelte, und ohne daß man vielen Beweisen ganz einfacher und dabei hoch wichtiger

(*) Hierüber wird in bald folgenden Blättern hinlängliche Auskunft gegeben werden.

Säzze entsagen müßte, wodurch die Einsicht von anerkannt weit umfassenden Lehren, welche den Praktiker in tausend Beziehungen wirklich interessiren, fragmentarisch, mank (defectuos) und dunkel bleibt.

5) Bei allen Körpern, welche ausgemessen werden sollen, muß man zuvörderst, mit Länge und Breite in der Berechnung im Reinen seyn, ehe man zu der dritten Dimension, zu der Höhe oder Tiefe des Körpers übergeht. Die Flächen-Berechnung muß also allemal vorausgehen; d. h., man muß geometrische Säzze anwenden, um alles, was sich über Länge und Breite, an dem Körper beobachten läßt, genau zu bestimmen, ehe man auf dessen Cubirung sich einlassen kann, Es ist daher ein unbesonnenes Verlangen, mit Umgehung der erwähnten Grundlagen, Cubic-Rechnung und Cubaturen lernen zu wollen, Das Produkt von 2 Factoren macht den Calkul der Fläche aus; und darum ist Kenntniß der Planimetrie und der Quadrat-Rechnung jedem Bau-Messer und Stereometer durchaus nothwendig; und diese gleichsam überspringen zu wollen, ist ein recht eitles, unerwogenes und ganz fruchtloses Beginnen! Es läßt sich einmal das Studium der Geometrie gar nicht zurükschieben, und auf keine Weise abweisen. Man muß nur nicht den Wahn dabei hegen, als beschränke sich Geometrie allein auf Land-Messen oder eigentliche Feldmeß-Kunst. Ihre Theorie ist der Grund aller mathematischen Kenntnisse, deren der Meßkünstler, der Baumeister und jeder Ar-

tist, welcher irgendwo nur mit Maaßen umgehen muß, gar nicht entbehren kann. (*)

6) Wenn man die Hauptlehren der Geometrie und Stereometrie, (wie sie auch in gemeinen Compendien beigebracht zu werden pflegen) wohl gefaßt hat, so muß man doch noch etwas weiter schreiten, und insbesondere mit der Frage sich beschäftigen: (welche sich früh oder spät doch nicht ganz abweisen läßt) — „wie viel man dann immer eigentlich mit dem Kreis allein," das heißt: mit Constructionen, welche aus der Natur des Zirkels folgen und diesem gemäs sind, ausrichten lasse? und wie weit die Folgerungen daraus schlußfest und richtig angehen?

Nach wenigen Erwägungen überzeugt sich jeder Unbefangene davon, daß man nicht ganz und überall mit dem Kreis, und mit darinn construirten Dreiekken . . . ausreiche. Viele wollen dieses nicht glauben, und halten dafür, weil man sogar viele Zeichnungen und Beweise unzähliger und sehr wichtiger Säzze mit dem Kreis wohl ausführen und gleichsam durchsezzen könne, so brauche man nichts weiters, und müsse nur darinn, (wie der Ausdruk oft lautet) recht wohl zu Hause seyn. Es ist wohl allerdings für Manche nicht angenehm, diesem Vorurtheil zu entsagen. Allein man muß der Wahrheit einmal dieses

(*) Daß namentlich die Näherungs-Rechnungen für Kreise, Kreis-Abschnitte und Kugel-Abschnitte eben dahin gehören, wird in der Folge sattsam gezeigt werden.

Opfer bringen. Bei einigem Nachdenken gelangt man auch wirklich zu der sichern Ueberzeugung, daß man in vergeblichen Bemühungen seine Zeit verderbe, wenn man alle in Bau-Messungen und Massen-Berechnungen vorkommende Probleme blos durch Hülfe der gemeinen Geometrie (*) auflösen zu wollen, fort und fort unternimmt, und es gleichsam erzwingen will, damit in allem durchzugreifen und fertig zu werden.

Damit wird man nun zu dem Bedürfniß geführt, auch die Lehre der Kegelschnitte, wo nicht ganz, doch zum Theil, sich bekannt zu machen, insbesondere aber der Hauptsäzze, welche die parabolische Linie, und die Ellipse angehen, (wenn es nicht anders seyn kann, auch mit einiger Anstrengung) sich zu bemächtigen. Nur durch Beiziehung dieser Kenntnisse lassen sich Körper, welche einmal keine zirkulare Form haben, ausmessen.

(*) In den weiter unten folgenden Blättern wird man auf Erörterungen kommen, durch welche die Unthunlichkeit der Versuche, mit gewißen geometrischen Constructionen des Kreises gewiße Aufgaben aufzulösen, dargethan wird. Ich müßte wohl Entschuldigungen über die Aufnahme solcher Untersuchungen beibringen, wenn ich nicht gewiß glaubte, daß sie dienlich seyen, gewiße Einbildungen zu zerstören, mit welchen sich viele Praktiker tragen, und unzwekmäßigen Bemühungen zu begegnen wodurch man in Unkunde sich herum treibt, und selbst andere zu Irrthümern verleitet.

Die Reduction unregelmäßig gebauter Körper auf die Kugelform befriediget gar häufig durchaus nicht; man muß deshalb die auf parabolische und elliptische Krümmungen zu Hülfe nehmen; und es ist gut, wenn der Stereometer der Einsicht sich naht, daß selbst die Reduction hierauf nicht ganz in allen Fällen genügend sey.

Die Anwendung hierüber im Praktischen ist sehr mannigfaltig; uud man stöst auf unübersehliche viele in der Natur und Kunst wirklich vorkommende Formen, welche man dem Messungs-Geschäft nicht unterwerfen kann, wenn man den Zusammenhang der Schnitte des Conus mit denen der Kugel nicht berüksichtigen, und die Wissenschaft dem Zwang unterwerfen will, blos allein mit Kreis- und Kugel-Formen sich zu beschäftigen.

IIte Frage.

Wie berechnet man die gewöhnlich bei Cubic-Rechnungen vorkommenden drei Factoren, so oft es Zahlen mit angehängten Brüchen sind, auf zweierlei Weise? ohne Decimal-Ausdrükke anzuwenden und mit Decimal-Ausdrükken?

Antw. Wenn die drei Factoren $(4\frac{3}{8}) \cdot (3\frac{3}{4}) \cdot (5\frac{7}{12})$, wie jederzeit geschehen kann, als $\left(\frac{35}{8} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{67}{12}\right)$ aufgestellt werden, und $\left(\text{weil } \frac{15}{12} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4} \text{ ist,}\right)$

gleich als $\frac{35 \cdot 5 \cdot 67}{8 \cdot 4 \cdot 4}$ oder $= \frac{35 \cdot 336}{128}$ berechnet worden sind, so ergiebt sich der Quotient, durch Division (mit 128 in 11725) $= 91\frac{77}{128}$. Das sind 91 ganze Cubic-Schuhe mit einem Bruch, welcher angehängt ist. Um diesen in Cub. Zolle zu verwandeln, stellt man sich den Quotienten vor:

$\left(\frac{77 \cdot 1728}{128}\right)$, und dessen Berechnung führt bestimmt auf die Zahl von $1039\frac{1}{2}$ Cub. Zollen. Die Berechnung fällt etwas beschwerlich aus, wenn man nicht die Zahlen (1728 : 128) schiklich hebt. Dieses geht aber recht gut von statten, wenn man 1728 als $= 32 \cdot 54$
und 128 $= 32 \cdot 4$
ansieht. Denn dadurch wird aus

$\left(\frac{77 \cdot 1728}{128}\right)$ zuerst $\frac{77 \cdot 54}{4}$, und eben so viel ist $\frac{77 \cdot 27}{2}$ welches $\frac{2079}{2}$ oder $1039\frac{1}{2}$ beträgt. Und damit weiß man nun, daß

$91\frac{77}{128} = 91$ Cub. Schuh $1039\frac{1}{2}$ Cub. Zoll.

Wird diese Ausrechnung nun in Decimalen geführt, so ist die Haupt-Vorstellung zuerst folgende:

$(4\frac{3}{8}) \cdot (3\frac{3}{4}) \cdot 5\frac{7}{12})$ ist

$= (4{,}375) \cdot (3{,}75) \cdot (5{,}583333)$.

Man multiplicirt hier zuerst	Alsdenn mult. man
4,375	16,40625
3,75	5,58333
13,125	82,03125
3,0625	8,203125
0,21875	1,3125000
16,40625	4921875
	4921875
	4921875
	4921875

Damit hat man d. Produkt: 91,60155803125

Zum Gebrauch bedarf man der tiefen Ziffern äusserst selten; es ist genug, daß man folgendes sezt und ausspricht:

Der Körper hält 91,601½ Cub. Schuh,
oder 91 Cub. Schuh, und 601½ Decimal-Cub. Zolle.

Vortheil dieser Rechnung:

1) Sie geht einfach von statten; zumal für jeden, welcher sogleich bei der Ansicht der Zahlen $4\frac{3}{8}$ weiß, daß der Decimal-Ausdruk dafür sey $= 4,375$
Und so auch, daß $3\frac{3}{4} = 3,75$ gleich geltend sey, und endlich $5\frac{7}{12} = 5,583333 \ldots$

Diese Kenntniß darf bei jedem Rechner, der nur 4 oder 6 Wochen mit Decimalen gerechnet hat, vorausgesezt werden. (*)

(*) Wer etwa die Brüche und deren Umwandlung nicht im Kopf hat, der mag Wucherers Decimal-Tabellen nachschlagen, oder ein ähnliches Buch. — Oder er

2) Das Resultat 91,601 . . . giebt sogleich, wenn wenn man nicht einmal alles durchzurechnen Lust oder Zeit hat, schon mit diesen wenigen fünf Ziffern zu erkennen, daß der Körper gar sehr wenig

über $91\frac{6}{10}$ Cub. Schuh

betrage, weil 0,601 mit $\frac{600}{1000}$ sich schon mit dem Auge vergleichen, und beinahe für ganz gleich achten läßt, dieser Bruch aber $\frac{6}{10}$ gleich ist.

Im praktischen Gebrauch wird man mit diesem Ansaz unzähligemal gut ausreichen, und man wird ihn allermeistens mehr benüzzen können, als den durch den strengen Calkul (ohne Decimalen) erhaltenen Bruch $\frac{77}{128}$, oder dessen Werth in Cubic-Zollen: $1039\frac{1}{2}$. Denn diese beede Größen geben es nicht zu erkennen, daß der Ueberschuß über 91 ganze Cubik-Schuhe so sehr nahe an $\frac{6}{10}$ liege. Man müßte erst eine eigene Nachrechnung anstellen, um dieses zu erfahren; welches auf eigene Schwierigkeiten wieder und oft auf Fehlschlüsse verleitet (wenigstens viele gemeine Rechner).

7) In den Fällen, wenn man den Ueberschuß (über die ganzen 91) in Duodecimal-Zollen zu wissen verlangt, muß man allerdings, da die Zahl 91,6015... Decimal-Cub. Zolle bedeutet, diese in Duodecimal-Cub. Zolle verwandeln. Da es aber dabei fast niemals auf 2 oder 3 Duodecimal-Cub. Zolle

---

muß die einzelnen Brüche einen nach dem andern — sich selbst in Decimalen verwandeln.

mehr oder weniger ankommt, so ist gestattet auch hiebei nur den Ansaz zu machen:

$$1000 : 1728 = 600 : 1036 \tfrac{8}{10},$$

oder auch, etwas genauer (wenn man dieses je nöthig hat)

$$1000 : 1728 = 601 : 1038{,}528 \ldots$$

wofür jeder 1039 wohl sogleich einsezzen wird, wenn er bedenkt, daß der wahre Multiplicator etwas höher, als 601 stehe. (*)

Es gehört nur geringe Klugheit dazu, daß man hiebei mit Mäßigung sich Abkürzungen erlaube, so daß der Bequemlichkeit des Calkuls nicht allzuviel darüber aufgeopfert werde.

IIIte Frage.

Legen dann aber nicht hiebei die so oft vorkommenden unendlichen Decimal-Brüche besondere Schwierigkeiten in den Weg? machen sie nicht das Resultat der Rechnung am Ende ungewiß und unzuverläßig? Führen dieselbigen nicht überhaupt auf allzuviele Zahlen in langen Reihen hinein?

(*) In manchen Fällen dieser Art ist es nöthig, daß man zwei Säzze formire, z. B.

$$1000 : 1728 = 601 : 1038{,}528$$

und $1000 : 1728 = 602 : 1040{,}256$

und alsdenn das arithmetische Mittel der Summe nehme. Der Umweg hiebei ist oft nur scheinbar; man erreicht damit auf eine sichere Weise meistens grose Schärfe in den Bestimmungen.

Antwort. Die Behandlung der unendlichen Decimal-Brüche schrekt allerdings viele ab, und versezt sie zugleich in Sorge, ob sie ihnen auch nur recht trauen dürfen? Die scheinbare Unvollkommenheit, das Fehlende in den kleinen Theilen, das Zurüklassen derselben! Aber — alles dieses bringt keine grose Gefahr, welche von dem Gebrauch der Decimalen jemand abhalten sollte.

Nehmen wir an, die drei Abmessungen des Körpers seyen folgende gewesen:

(Länge) . (Breite) . (Höhe)

$(4\tfrac{3}{16}) \cdot (1\tfrac{4}{7}) \cdot (5\tfrac{7}{12})$

In Decimalen: (4,1875) . (1,5714) . (5,5833)

Man führe den Calkul auf zweierlei Art; und sezze die Factoren deshalb zuerst so:

$$\left(\frac{67}{16}\right) \cdot \left(\frac{11}{7}\right) \cdot \left(\frac{67}{12}\right) \text{ das ist} = \frac{4489 \cdot 11}{1344}$$

oder 49379 ist durch 1344 zu dividiren. Der Quotient fällt aus auf $36\tfrac{995}{1344}$ Cub. Schuh, (in so ferne 4; 1; 5 ganze Längen-Schuh bedeuten). Der Bruch an den 36 Ganzen erfordert eine besondere Nachrechnung, welche

$1279\tfrac{2}{7}$ Duodecimal-Cuc. Zolle ausgiebt.

Man findet diese Zahl, indem man so denkt: der Anhang ist: $\frac{995 \cdot (1728)}{1344}$. In Factoren zerfällt ist eben so viel: $\frac{995 \cdot (32 \cdot 54)}{(32 \cdot 42)}$ d. h. $\frac{995 \cdot 9}{7}$ od. $\frac{8955}{7}$

Der Erfolg ist: $1279\frac{3}{7}$ Cub. Zoll in Duodec. M. sind über 36 Cub. Schuh vorhanden.

Ohne die schikliche Zerfällung in Factoren würde diese Rechnung allerdings weitläufig ausgefallen seyn, und wer nicht 1728 als (32.54) kennt, und 1344 als (32.42), wird wohl eine halbe Seite und mehr noch mit Ziffern anfüllen, bis er auf das Resultat hinaus kommt, daß $\frac{995}{1344} = 1279\frac{3}{7}$ Cub. betragen.

Damit weiß man aber alsdenn doch noch nicht, ob dieser Ueberschuß in Cubik-Zollen $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ von einem ganzen Cubik-Schuh betragen, welches man doch meistens in Praxi wissen will, auch allemal wissen sollte, und muß erst eine besondre Nachrechnung anstellen, um eben dieses zu erfahren! —

Nun wollen wir dagegen die 3 Factoren in Decimalen vor uns nehmen, und behandeln.

Das Product der 2 ersten Factoren beschäftiget uns zuerst:

(Länge) . (Breite)
(4,1875) . (1,5714) giebt im Produkt
= 6,58033750. Dieses wird multiplic.
mit 5,5834 als mit der Höhe.. [anstatt mit 5,583333 . . . welches dem unendlichen Decim. Bruch von $5\frac{7}{12}$ gleichgeachtet wird]. (*)

```
  32,9016875
   3,29016875
    526427000
     197410125
      263213500
--------------
 36,7406563975
```

(*) Eine nähere Erläuterung hierüber wird sogleich nachfolgen.

Hieraus hat man das verlangte Product, welches
36 Cub. Schuh 740 Decimal-Cub. Zolle . . .
beträgt mit einem Ueberschuß von Cub. Lin., welcher gewöhnlich nicht geachtet wird. Daß aber nun 36,740 . . . recht nahe an $36\frac{3}{4}$ Cub. Schuh liege, erkennt der Decimal-Rechner hiebei sogleich (mit einem Blik), weil ihm der Werth von $0{,}750 = \frac{3}{4}$ von der ersten Lehrstunde des Unterrichts her doch wohl bekannt ist.

Nun ist jedoch noch eine nähere Erwägung der 2 Decimalwerthe, welche für $1\frac{4}{7}$ und $5\frac{7}{12}$ eingetragen sind, anzustellen.

Der Werth von $1\frac{4}{7}$ ist, genau genommen, $= 1{,}5714285\ldots$ und da wir bei der Multiplication

$$(4{,}1875) \cdot (1{,}5714)$$

die Ziffern nach . . . 4 weggelassen haben, so ist leicht einzusehen, daß auch das angenommene Product 6,5803375 etwas zu niedrig stehe. Man erkennt dieses, wenn man statt 1,5714 die Zahl 1,57142 als Factor annimmt; weil

$$(4{,}1875) \cdot (1{,}57142) = 6{,}58042125$$

ausgiebt, welche Zahl mit 6,58033 . . . .
verglichen werden mag. Noch höher aber würde das Product ausfallen, wenn man mit dem noch genauern Decimal-Werth von $1\frac{4}{7}$, mit 1,571428 . . . die Multiplic. vornähme. Allein man umgeht dieses auf gar viele Ziffern hineinführende Geschäft, wenn man so bei sich urtheilt:

„Die zwei Factoren (4,1875) . (1,5714) mögen „beibehalten werden, wie sie hier stehen; aber, weil „nun so viel doch gewiß ist, daß das Produkt aus „ihnen etwas zu niedrig ausfalle, so wollen wir „diesem Fehler dadurch abhelfen, daß wir den Deci-„mal-Werth von $5\frac{7}{12}$ um etwas erhöhen. Dieses „wird geschehen, wenn wir statt 5,58333 ... anneh-„men, es sey 5,58334 gültig, oder (noch abgekürzter)

anstatt 5,5833 . . .

die Zahl 5,5834 . . . als Factor eintreten „lassen. Dieses lezte wird gewählt, und in die Rech-nung aufgenommen, weil der mittlere Factor 1,5714 ebenfalls nur 4 Decimal-Ziffern in sich trägt, und daher das Gebrechen der Ungenauigkeit in der 5ten Stelle seinen Anfang nimmt. Dieses ist die Recht-fertigung (*) für den Calkül mit

(4,1875) . (1,5714) . (5,5834)

oder (1,5803375) . (5,5834)

Der Erfolg ist, daß freilich das Produkt am Schluß etwas zu hoch steht, weil es auf

36,7046 . . . ausfällt;

wogegen der strenge Calkul nur 36,7403 . . . zum Vorschein bringt, oder schärfer 36,74032 .. Da aber die Anzahl der Cubic-Zolle doch richtig ist, (0,704)

(*) In anderu Fällen ist es nicht zuläßig, daß man an-statt 0,58333 die Zahl 0,5834 annehme. Aber, wenn ein anderer Factor zu niedrig steht und eine Vergütung erfordert, ist dieses gestattet.

so kommt die Abweichung in Cubic-Linien nicht in Betracht. Würde aber dieselbe je erfordert, so ist alsdenn mit Aufnahme einer weitern Ziffer in die Factoren leicht Rath geschafft. Man nimmt nehmlich nun die Multipl. vor mit

(4,1875) . (1,57143) . (5,58333) (*)

und erhält durch sie das (nun genauere) Product: 36,74025 . . . .

Darüber, ob der Schluß der Rechnung

36 C. Sch. 740$\frac{1}{4}$ Cub. Zoll

oder 36 C. Sch. 740$\frac{3}{10}$ Cub. Zoll

auszusprechen sey, wird kaum jemals ein praktisches Interesse zum Streit eintreten.

So wird auch niemand wohl darum ein Wort verlieren, wenn aus dem auf diesem Weg zuerst erhaltenen Betrag in Decimal-Cub. Zollen, nehmlich aus 0,7043 oder 0,7042 der Werth in Duodecimal-Zollen verlangt wird. Man sezt die Proportion:

1000 : 704 = 1750 : 1278,720 . . .

und schreibt für das lezte Glied sogleich 1279, weil man weiß, daß 704 etwas zu klein steht, und $\frac{2}{10}$ oder $\frac{3}{10}$ weggelassen sind. Auf diese Art hat man die Anzahl der Duodec. Cub. Zolle bis auf die Schärfe von 1 Cubik-Zoll (mehr oder weniger) ausgerechnet.

(*) Hier ist es der Ordnung gemäs, daß man 1,57143 als Factor eintreten lasse, indem man in dem richtigen Decimalwerth, welcher 1,571428 ist, die Zifer 3 wegen des folgenden 8 erhöht.

IVte Frage.

Wenn gleich hieraus zu ersehen ist, daß die unendlichen Decimalbrüche sich in den kleinen Theilchen (welche nach den 10tausend Theilchen folgen) abkürzen lassen, so geräth man dennoch, wenn auch nur 3 oder 4 Decimal-Zifern in jedem Factor vorkommen, auf ziemlich beschwerliche Hauffen von Zahlen, besonders bei der Multiplikation mit dem 3ten Factor. Sollten nicht noch weitere Abkürzungen statt finden können, um die Gefahr des Verrechnens abzuwenden?

Antwort. Allzuviele Abkürzungen sind niemals anzurathen, und die Liebe zur Bequemlichkeit muß ihre Ansprüche nicht allzuweit treiben. Allein einige Abkürzungen sind allerdings beinahe jederzeit statthaft. Eben in dem vorgelegten Beispiel helfen die Ziffern, welche in der Schluß-Zahl hinter den Ziffern 36,740 vorkommen, zur Haupt-Sache sehr wenig, und höchstens ist es nöthig, auf eine oder zwei Decimal-Zifern weiter (auf die nach . . . 740 folgende) noch den Bedacht zu nehmen. Man hätte deshalb ohne Gefahr, abgekürzt, den Calkul so führen können:

6,58033	750
5,5834	
32,90168	25
3.29016	828
52642	7
1974	1
263	2
36,7405	2 . .

Oder (	6,58034	
auch: (	5,58333	
	32,90170	
	3,29017	0
	52642	7 2
	1974	1 0 2
	197	4 . . .
	19	7
	36,74021	. . . .

Hier sieht jeder, wie vor dem langen Strich nur eine mäßige Anzahl von Ziffern noch liege, und daß dennoch der Erfolg immer im Wesentlichen der nemliche sey:

36,704 . . . mit einem kleinen Ueberschuß, welcher zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ schwebt.

Noch ist eine Bemerkung hiebei nicht zu umgehen: Alle Factoren, welche die Gestalt und Folge der Zifern haben, wie 0,58333... oder 0,58444... und dergleichen andere, führen auf keine beschwerliche Multiplikationen. Man benüzt dabei immer eine gewiße schon vorgekommene Zahl, welche ohne Anstrengung fort und fort untergesezt wird. In unserm Beispiel ist (in dem lezten Saz) 19741... eine solche Zahl.

Der geübte Rechner sezt am Schluß eine solche Zahl wohl gar nicht mehr unter (im Einschreiben), sondern macht den Schluß für sich

„daß eine der lezten Zifern im End-Resultat „um 1 oder 2 kleine Theilchen sicher erhöht wer„den dürfe.“

So erkennt er, eben bei dem lezten Saz, daß 36,74023 richtiger seyn müsse, als 36,74021, weil er leicht übersieht, daß 1974 noch 2 oder 3mal zur Addition eingesezt werden könnte, wenn man die Rechnung schärfer nehmen, und statt 5,583333 (in den Multiplikator) 5,5833333... aufnehmen wollte.

Vte Frage.

Auf welche Weise haben denn aber die Alten ähnliche Rechnungen geführt? und, wie läßt sich ihre Calkulation mit der neuern Art in Vergleichung sezzen?

Antwort; Wenn sie zehntheiliges Maas vor sich hatten, so war ihre Cubik-Rechnung von der neuern im Wesentlichen nicht verschieden. Sie verwandelten nur alle Brüche in kleine Theile, in Scrupel und Zehntels-Scrupel, und stellten alles in ganzen Zahlen dar; Sie übernahmen dabei die Mühe, große Multiplikationen ganz durchzuführen. Und auf diese Weise wird noch jezt häuffig gerechnet.

Das Beispiel, das wir bereits kennen, soll uns hierüber zur Erläuterung dienen.

Sie schrieben den Werth der 3 Factoren, wie folgt:

$$\left(4\tfrac{3}{16}\right) \cdot \left(1\tfrac{4}{7}\right) \cdot \left(9\tfrac{7}{12}\right)$$

$$\left(\overset{\text{I}}{4}\;\overset{\text{II}}{1}\;\overset{\text{III}}{8}\;\overset{\text{IV}}{7}\;\overset{\text{V}}{5}\right) \cdot \left(\overset{\text{I}}{1}\;\overset{\text{II}}{5}\;\overset{\text{III}}{7}\;\overset{\text{IV}}{1}\;\overset{\text{V}}{4\tfrac{2}{7}}\right) \cdot \left(\overset{\text{I}}{5}\;\overset{\text{II}}{5}\;\overset{\text{III}}{8}\;\overset{\text{IV}}{3}\;\overset{\text{V}}{3\tfrac{1}{3}}\right)$$

oder

$$\left(4\;1\;8\;7\;\overset{\text{V}}{5}\right) \cdot \left(1\;5\;7\;1\;\overset{\text{V}}{4\tfrac{2}{7}}\right) \cdot \left(5\;5\;8\;3\;\overset{\text{V}}{3\tfrac{1}{3}}\right)$$

So waren durchgehends Zehentels-Scrupel vorhanden. Den Bruch $\frac{2}{7}$ im mittlern Factor ließ man auch ganz weg, wie auch $\frac{1}{3}$ im lezten. Hiemit waren dann nur ganze Ziffern vorhanden. Das Product der 2 ersten Factoren wurde nun ausgerechnet; es ist: 658033750; womit schon über 658 Millionen solcher kleinen Theilchen in den Calkul kamen. Diese Zahl mit 55833 multiplicirt, gab das Schluß-Product: 36739888463750.

$$
\begin{array}{r}
658033750 \\
55833 \\
\hline
1964101250 \\
1964101250 \\
5264270000 \\
3290168750 \\
3290168750 \\
\hline
36739888463750
\end{array}
$$

Man schnitt wohl sogleich die 3 lezten Ziffern weg, und sprach aus:

Das Product ist = 36739888463 Cub. Scrupel

oder genauer $\overset{\text{I}}{36}\ \overset{\text{II}}{739}\ \overset{\text{III}}{888}\ \overset{\text{IV}}{463\frac{3}{4}}$

Also 36 Cubik-Schuh, 739 Decimal-Cub. Zolle,

888 Dec. Cub. Lin. 463$\frac{3}{4}$ Dec. Cub. Scrupel.

Das Resultat der Rechnung mußte etwas zu niedrig damit herauskommen. Dieses sah' man sogleich wohl ein, weil in dem mittlern Factor $\frac{2}{7}$ und in dem leztern $\frac{1}{3}$ aus dem Calkul ganz weggeblieben waren.

Man nahm deshalb an, es sey nun wohl gestattet,

anstatt $36^{I}\ 739^{II}\ 888^{III}$

die etwas erhöhte Zahl } $36^{I}\ 740^{II}\ 000^{III}$

für das Produkt sezzen, so daß man die Cubik-Linien (888^{III}) oder was etwa dafür in der Erhöhung eintreten mochte, ganz fallen ließ.

Wollte man mehrere Gewißheit hierüber sich verschaffen, so nahm man eine zweite Multiplikation vor, indem man den lezten Factor als = 55834, einsezte. Damit kam das nun etwas zu hohe

Product zum Vorschein:	367406563975oo
Dieses addirt zu dem vorigen, (welches zu niedrig war)	3673988846375o
gibt die Summme beeder =	7348054486125o
Und nun das arithmet. Mittel:	36740272430625

scheint zu dem Schluß zu berechtigen, daß

$36^{I}\ 740^{II}\ 272^{III}$ . . .

das als hinlänglich genau anzunehmende Resultat der ganzen Rechnung seyn werde.

Man ersieht aus diesem Schluß, daß der Erfolg, welchen man nach dieser Rechnungsweise der Alten erhält, eben darauf hinauslaufe, worauf wir durch die Decimal-Rechnung oben gekommen sind. Das Verfahren mit der leztern gewährt aber doch einige Vortheile. Es sollen nur zwei derselben kurz angedeutet werden.

1) Man behält bei der Operation mit Decimalen die ganze Quadrat- und Cubik-Schuhe, und alsdenn die Quadrat- und Cubik-Zolle mehr im Auge, und sieht sogleich, wo sie anfangen und endigen.

Dagegen muß man bei der alten Methode, bei welcher so viele Zifern als das Ganze sich darstellen, die erst am Ende mittelst der gewöhnlichen Signaturen (I II III IV V) unterabgetheilt werden müssen, sehr sich in Acht nehmen, daß man ja sich nicht verzähle, und am Ende

die Anzahl der Cubik-Schuhe

unrichtig ausspreche.

Der 2te Vortheil

besteht in der Leichtigkeit, bestimmte Abkürzungen vorzunehmen, welches bei den Multiplikationen mit Decimalen viel sicherer sich ins Werk richten läßt, wo man die Additions-Säzze umgekehrt schreibt, als bei den ganz-auszuschreibenden Zahlen-Reihen der ältern Rechnungs-Art. (*)

Indessen sey damit der alten Rechnungs-Methode nicht Hohn gesprochen! Wer ihrer gewohnt ist, mag sie beibehalten; Es wird nur immer gut und räthlich, auch dem ganzen Calkul, so wie er jezt

---

(*) Geübte alte Rechner wissen sich zwar auch hiebei durch gewiße Vorschriften zu helfen. Diese sind nicht verwerflich. Allein viele Praktiker merken sich solche nicht gehörig, und machen daher bei Abkürzungen leicht Verstose.

einmal behandelt wird, angemessen seyn, daß die neuere Art der Rechnungs-Operationen jedem Arithmetiker ebenfalls wohl bekannt werde, wenn er anders die neuern mathematischen Bücher benüzzen, und die Vortheile vieler brauchbaren Vorschläge und Erfindungen unserer Zeiten sich eigen machen will.

VIIte Frage.

Wenn aber die 3 Factoren in 12theiligem Maas ausgesprochen und gegeben werden, (in Schuhen, Zollen, Linien), und darnach (direct) gerechnet wird, welche Vergleichung hat zwischen den nun eintretenden Rechnungs-Operationen nach der alten und neuen Weise statt?

Antwort. In dem einmal gewählten Beispiel würde so gesezt werden:

Länge	.	Breite	.	Höhe
$(4\frac{3}{16})$	.	$(1\frac{4}{7})$	.	$(5\frac{7}{12})$
(4 Schuh $2\frac{1}{4}$ Zoll)	.	(1 Sch. $6\frac{6}{7}$ Zoll)	.	(5 Sch. 7 Zoll)

oder genauer bis auf Linien:

$$\begin{pmatrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 1 & 6 & 10\frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

In dem mittlern Factor wird bei der Rechnungs-Operation der Bruch $\frac{2}{7}$ von den Praktikern meistens ganz weggelassen, weil dessen Beibehaltung bei ihrer Methode die Zahlen-Haufen, in welche sie ohnedem schon gerathen, noch allzusehr vermehren würde.

Es wird nun jeder Factor ganz auf Duodecimal-Zolle gebracht, indem man so rechnet:

$\left(\overset{I}{4}\ \overset{II}{2}\ \overset{III}{3}\right)$. ist gleich 50 Zoll 3 Linien, (*)
oder gleich 603 Duodec. Linien.

$\left(\overset{I}{1}\ \overset{II}{6}\ \overset{III}{10}\right)$. ist gleich 18 Zoll 10 Linien,
oder gleich 226 Duodec. Linien.

$\left(\overset{I}{5}\ \overset{II}{7}\ \overset{III}{0}\right)$. ist gleich 67 Duodee. Zoll,
oder gleich 804 Duodec. Linien.

Alles dieses sind Längen-Grösen.

Die drei Factoren heißen diesemnach jezt so: (603) . (226) . (804); und das Produkt giebt Duodecimal-Cubik-Linien, und zwar

109567512; also über 109½ Millionen.

Die Rechnung steht so

226	136278
603	804
678	545112
1356	1090224.
136276	109567512

Diese grose Zahl ist in Duodecimal-Cubik-Zolle zu verwandeln, um sich damit der Brauchbarkeit zu nähern.

(*) Nehmlich 4 Schuh, oder $\overset{I}{4}$ sind gleich $\overset{II}{(4 . 12)}$ oder $\overset{II}{48}$

Daher sind $\overset{I}{4}\ \overset{II}{2}$ soviel als $(\overset{II}{48} + \overset{II}{2})$ oder 50 (Zolle)

Diese sind $\overset{III}{600}$ gleich; weil (12 . 50) = 600 ist. Folglich müssen $\overset{I}{4}\ \overset{II}{2}\ \overset{III}{3}$ oder $(\overset{II}{50} + \overset{III}{3}) = (\overset{III}{600} + \overset{III}{3})$ oder 603 Lin. seyn.

Man dividire daher durch 1728, wie folgt:

```
1728|109567512|63407⅛
     10368
     -----
      5887
      5184
      ----
       7035
       6912
       ----
        12312
        12096
        -----
          216
```

Das ist die Anzahl der Cubik-Zolle, welche dem Produkt der 3 Factoren gleich ist.

Diese Cubik-Zolle verwandelt man endlich durch eine fortgesezte Division (mit 1728) in Cubik-Schuhe und erhält damit:

36 Cubik-Schuhe und $1199\frac{1}{8}$ Duodec. Cubik-Zolle.

Auf diese Weise ist die Ausrechnung endlich zu Stande gebracht, und nach derselben haben die Alten meistens ihren Calkul geführt. Auch neuere Rechner weichen wenig davon ab, wenn sie direct aus gegebenen zwölftheiligen Längen-Maasen den Ansaz machen, und von Decimalen nichts wissen wollen.

Der Erfolg am Schluß ist freilich, daß die Zahl

$$\overset{\text{I}}{36} \quad \overset{\text{II}}{1199\tfrac{1}{8}}$$

zu niedrig ist, indem die richtige Zahl

$$\overset{\text{I}}{36} \quad \overset{\text{II}}{1279\tfrac{2}{7}}$$

beträgt, wie oben S. 15. bereits angegeben worden. Dieser Unterschied kommt daher, weil bei dieser Duodecimal-Rechnung der Bruch $\frac{2}{7}$ in dem mittlern Fac-

tor weggelassen worden, indem man sich erlaubt hat, anstatt ($\overset{\text{I}}{1}$ $\overset{\text{II}}{6}$ $\overset{\text{III}}{10\frac{3}{7}}$) blos ($\overset{\text{I}}{1}$ $\overset{\text{II}}{6}$ $\overset{\text{III}}{10}$), und also anstatt $226\frac{3}{7}$ Duodec. Linien nur 226 einzusezzen.

VIIte Frage.

Der bemerkte Unterschied beträgt hier doch 80 Cubik-Zolle. Mag dann auch die Uebergehung des kleinen Betrags von $\frac{3}{7}$ einer einzigen Duodecimal-Linie eine so grose Abweichung von dem schärfern und richtigern Schluß-Saz veranlassen.

Antwort. Diesen merklichen Unterschied in den Resultaten bei Cubik-Rechnungen wollen freilich manche Unkundige kaum glauben. Aber die Abweichung beläuft sich allerdings auf 80 Cubik-Zolle, wenn man nur 226 zum mittlern Multiplikator annimmt, anstatt der richtigern Zahl ($226\frac{3}{7}$).

Es ist lehrreich, daß man sich hievon auf folgende Weise überzeuge:

Gesezt, daß der mittlere Factor nur $\frac{1}{10}$tel einer Duodecimal-Linie gröser als 226 wäre, so würden das Product von

$$(603) \cdot (226\tfrac{1}{10}) \cdot (804) = 109615993{,}2$$

betragen; in dem (603) . (226,1) für sich schon: 136338,3 ausmacht. Diese Zahl mit 804 multiplicirt, giebt aber:

109615993,2 Duodec. Cub. Lin.

Diese Zahl durch 1728 dividirt, bringt den Quotienten hervor:

63435,181..

welcher von neuem durch 1728 dividirt im Schluß-Saz nun zeigt:

36 Cub. Schuhe 1227,181.. D. Cub. Zolle.

Vorher, bei der Annahme des Factors 226 sind nur vorhanden gewesen: 36 Cub. Sch, 1199,125 Duod. Cub Zolle. Und hiemit beträgt die Erhöhung im Cub. Maas bei dieser Annahme schon bei 28 Cub. Zolle.

Nun werde der mittlere Factor abermals um $\frac{1}{10}$tel erhöht, und also gesezt:

$$(603) \cdot (226\tfrac{2}{10}) \cdot (804)$$

Da ist (603) (226,2) = 136398,6
und diese Zahl mit 804 multipl. giebt: 109644874,4 Duodec. Cub. Linien. Das sind so viel, als

63463,237 Duodec. Cub. Zolle,

oder 36 Cub. Sch. 1255, 237 Cub. Zolle.

Damit sieht man, daß eine Erhöhung von $\frac{2}{10}$, in dem Factor (226) im Ausgang eine Erhöhung von 56 Duodec. Cub. Lin. hervorbringe.

Hierauf werde endlich noch eine Erhöhung um $\frac{1}{10}$tel vorgenommen; und gesezt:

$$(603) \cdot (226\tfrac{3}{10}) \cdot (804)$$

Das Product der 2 vordern Factoren ist = 136458,9
Und (136458,9) · (804) ist = 109712955,6 Duodec. Cub. Linien. Diese auf Cub. Zoll reducirt, geben 63491,293 welche so viel, als

36 Cub. Schuh 1283,293 Duodec. Cub. Zolle ausmachen. Hier sind also bei der Annahme von $226\frac{3}{10}$ 84 Cub. Linien mehr hervorgegangen, als bei der ersten. Dadurch wird wohl jedem einleuchtend,

daß da $\frac{2}{7}$ zwischen $\frac{2}{10}$ und $\frac{3}{10}$ liegt, das Resultat von

$$(603) \cdot (226\tfrac{2}{7}) \cdot (804)$$

allerdings zwischen $\overset{I}{36}$ $\overset{II}{1255{,}237}$

und $\overset{I}{36}$ $\overset{II}{1283{,}297}$ hineinfallen werde, und man hat sich diesemnach nicht darüber zu verwundern, daß $\overset{I}{36}$ $\overset{II}{1279\tfrac{2}{7}}$ als der Schluß des strengen Calkuls hervorkomme, welcher bei der bequemen Annahme von

$$(603) \cdot (226) \cdot (804) \text{ nur } = \overset{I}{36} \;\; \overset{II}{1199\tfrac{1}{8}}$$

sich ergeben hat. Man darf nur über die erste Multiplikation mit $(226\frac{1}{10}) \cdot (603)$ etwas nachdenken, und sich vorstellen, wie hier das Product (136338,3) bereits über 60 höher ausfalle, als das von

$(226) \cdot (603)$ welches $= 136278$ beträgt; und daß nun der 3te Factor (804) auch noch dazu komme, so wird die Gröse der Erhöhung damit jedem recht leicht begreiflich werden.

Uebrigens mag bei dem Anlaß dieser Betrachtung die Bemerkung wohl nicht am unrechten Ort stehen, daß die Haupt-Ursache, warum gewöhnlich zwei Berechnungen über stereometrische Ausmessungen, welche von zwei Rechnern über einen und denselben Gegenstand geführt werden, so sehr von einander abweichen, eben in der Uebergehung kleiner Bruchtheile zu suchen ist, welche der eine weniger achtet

als der andre, oder welche der eine an dem einen Factor wegläßt, der andern an dem andern; (auch wohl an beeden) weshalb dann oft Vorwürfe über die Disharmonie der Resultate wechselsweise entstehen, deren Grund auf dem hiemit vorgezeigten Weg allein eingesehen werden mag.

VIIIte Frage.

Aus den zulezt vorgetragenen Rechnungs-Säzzen erhellet unter andern auch, daß man es sich erlaube, auch bei wirklicher Durchführung eines Calkuls über 12theiliges Maas, dennoch Decimalen den Cubik-Zollen anzuhängen, wenn gleich diese Duodecimal-Cubik-Zolle sind.

Entsteht dann durch diese Vermischung keine Verwirrung? oder ist solche aus guten Gründen gestattet?

Antwort. Diese Beiziehung der Decimalen ist allerdings gestattet, und in unzähligen Fällen sehr vortheilhaft. Die Unkunde, mit Decimal-Brüchen umzugehen, erwekt nur bei dem ersten Anschein einige Anstößigkeit.

Wenn man $4\frac{3}{16}$ Schuhe im Längen-Maas vor sich hat, so läßt sich dafür sezzen:

$\overset{I}{4}\ \overset{II}{2\frac{1}{4}}$ und auch $\overset{I}{4}\ \overset{II}{2{,}25}$;

Beede Ausdrükke bedeuten 4 Schuh $2\frac{1}{4}$ Zoll. Eben so viel sind $\overset{II}{50\frac{1}{4}}$ oder $\overset{II}{50{,}25}$, d. h. $50\frac{1}{4}$ Zoll.

Ferner ist $1\frac{4}{7}$ Schuh, gleich 1 Schuh $6\frac{6}{7}$ Zolle; und dieses läßt sich schreiben $\overset{I}{1}\ \overset{II}{6,85714}$; wo freilich der Ausdruk $\overset{II}{6,85714}$... nicht ganz vollendet ist; aber wegen groser Schärfe dem streng-richtigen im Gebrauch gleich geachtet wird. Daher denn auch

$18\frac{5}{7}$ Duodecimal-Zolle

gleich 18,85714 Duodec. Zollen

genommen werden; oder in Abkürznng $= \overset{II}{18,857}$... Der Vortheil leuchtet sogleich bei folgender Calculation ein: Man sezt die 3 Factoren des Beispiels, wie folgt, hin: (Es sind jezt Zolle; Zwei davon mit angehängten Decimalen)

(50,25) . (18,857) . (67). Die Multiplikation fällt alsdenn so aus:

18,857	9475,6425
50,25	67
942,85	56853,8150
3,7714	6632,94975
0,94285	63486,76475
947,56425	

Die lezte Zahl, durch 1728 dividirt, giebt uns

36 Cub. Sch. 1278,76 Duodec. Cub-Zolle.

Also eine Näherung bis auf einen Duodec. Cubic-Zoll des ganz scharfen Calkuls, womit jeder zufrieden seyn wird. Der nachdenkende Rechner wird auch statt 1278,76... ohne Gefahr selbst sogleich 1279 schreiben, weil er weiß, daß sein angenommener Fac-

tor 18,857 um etwas weniges zu niedrig steht; so daß $1278\frac{3}{4}$ allerdings in 1279 übergehen darf.

Bei dieser Ausführung geht gar keine unziemliche oder beschwerliche Vermischung der Decimalen mit ganzen Zahlen vor; und daß die Anwendung eben der Decimalen hier auf eine sehr ungezwungene Weise zum vorgesezten Zwek führe, ist doch auch nicht zu mißkennen. Anstatt $\frac{1}{4}$ wird 0,25 eingesezt; anstatt $\frac{6}{7}$ aber 0,857. Die Multiplikation darauf (50,25) . 18,857 ist kein sehr mühsames Geschäft; noch auch die nächste (mit 67). Und mit dem Product hat man sogleich die Anzahl von $63486\frac{3}{4}$ Duodecimal-Cub. Zolle. Denn, daß der hervorgehenden Zahl 63486,764... keine andre Bedeutung wohl zukommen könne, erkennt jeder, der nur eine geringe Einsicht von Decimalen besizt, und von dem, was in Näherung gültig ist.

Den Fall angenommen, daß der Anhang der Decimalen nicht 0,764, sondern 0,664 geheißen hätte, so würde dem Product 63486,664 die Zahl $63486\frac{2}{3}$ Duodec. Cub. Zoll gleichgeachtet werden, weil 0,666... dem Werth von $\frac{2}{3}$ gleichgeltend ist, und die Aenderung der kleinen Theilchen in der 3ten und 4ten Decimal-Stelle bei diesen Aussprüchen der Haupt-Zahl nicht mehr in Anschlag kommt.

Hieße aber die Zahl mit dem Anhang 63486,875; so würde der Werth hievon $63486\frac{7}{8}$ ausgesprochen. Hieße der Anhang 0,8333... so würde $\frac{5}{6}$ dafür gesezt. Wer nun diese angehängten Brüche in bestimmten

Duodecimal-Linien zu wissen nöthig hat, kann sich solche jedesmal leicht darein versezzen. Alle Ausrechnungen dieser Art werden durch Proportionen, wie folgt, ausgeführt:

Bei $\frac{2}{3}$	3	:	2	=	1728	:	1152.
Bei $\frac{7}{8}$	8	:	7	=	1728	:	1512.
Bei $\frac{5}{6}$	6	:	5	=	1728	:	1440.

Jeder, der viel mit Duodecimal-Maas in Cubik-Rechnungen umzugehen hat, sollte allerdings die am meisten vorkommende Theile von 1728 im Kopf haben, z. B. $\frac{1}{2}$ (1728) = 864; $\frac{1}{3}$ (1728) = 576 und so f.

IXte Frage.

Dieses mag für viele einzelne Fälle recht wohlthuend seyn und gut aushelfen; allein die Mannigfaltigkeit der Zifern, welche als Decimalen an die Zahlen ganzer Cubik-Schuhe, oder Cubik-Zolle sich anhängen, ist so gros, (wie sich fast bei jedem neuen Beispiel abnehmen läßt) daß man doch mit den erwähnten Werthen der einfachen Brüche nicht ausreichen wird. Es bleibt also doch wohl nichts, als die besondre Ausrechnung übrig, die vielen Zahlen dabei mögen so beschwerlich seyn, als sie wollen? Oder giebt es doch noch etwa eine andre Aushülfe hiebei?

Antwort. Die besondre Ausrechnung ist freilich sehr oft nicht zu umgehen; aber sie ist doch sogar sehr ermüdend nicht, zumal wenn man sich die Multipla von 1728 von 1 bis 9 wohl bekannt ge-

macht hat, oder solche sich dabei jedesmal zur Seite legt:

1.	1728	6.	10368
2.	3456	7.	12096
3.	5184	8.	13824
4.	6912	9.	15552
5.	8640		

So wird das oben aufgestellte Beispiel (S. 17.) in welchem $3\overset{1}{6},7403..$ vorgekommen, folgende Calkulation, unter vorausgesezter Benuzung dieser kleinen Hülfs-Tabelle, veranlassen:

$$
\begin{array}{lr}
0,7 \ldots\ldots = & 1209,6 \\
0.04 \ldots = & 69,12 \\
0,0003 \ldots = & 0,5184 \\
\hline
 & 1279,2384
\end{array}
$$

womit man in den Stand gesezt wird, auszusprechen: „Es sind vorhanden

36 Cub. Schuh und $1279\frac{1}{4}$ Duodec. Cub. Zolle.“ Wer den Bruch 0,2384... schärfer angegeben wissen wollte, könnte immer auch leicht dazu gelangen. Es wird aber allermeistens wohl zuläßig seyn, daß man 0,240 oder 0,25 für den Anhang der Decimalen gelten lasse, und also $\frac{1}{4}$ annehme.

Bei der Anwendung dieser kleinen Tabelle, (welche jeder Cubik-Rechner immer in seiner Schreibtafel bei sich führen sollte, wenn er sie nicht im Kopf zu behalten, Anlage hat,) ist es allerdings nöthig, daß

man sich wohl vorsehe, beim Einsezzen der einzelnen Zahlen (zur Addition) in den Stellen der Decimalen sich nicht zu irren, und im Einrükken der Ziffern recht genau zu seyn. Dieser Pflicht der Aufmerksamkeit kann und darf sich aber kein Rechner entziehen, er mag Längen oder Flächen, oder Körper in den Calkul nehmen; sie ist jederzeit unerläßlich!

Xte Frage.

Mit allem diesem ist noch nicht ganz deutlich, wie viel denn von einem Decimal-Cubik-Schuh, oder Decimal-Cubik-Zoll hinweggenommen oder abgeschnitten werden dürfe, so daß eben noch der Innhalt eines Duodecimal-Cubik-Schuhs, oder Duodecimal-Cubik-Zolls übrig bliebe?

Antwort. Dieses läßt sich doch deutlich einsehen, wenn man die Proportion formirt:

$$\underbrace{1728 : 1}_{\text{Duodec. Cub. Zolle.}} = \underbrace{1000 : \tfrac{1000}{1728}}_{\text{Dec. Cub. Zolle.}}$$

wobei man folgendes aussprechen kann:

1 Cubik-Schuh, dessen Grund-Linie 12 Zolle zur Länge hat, hält 1728 Duodecimal-Cub. Zolle.

Ebendieselbe Cubik-Schuh, mit eben derselben Grund-Linie, welche aber in 10 gleiche Theile, d. h. in 10 Decimal-Zolle abgetheilet sey, hält 1000 Cubik-Zolle. Diese sind also von grösserm Innhalt und Betrag.

Also muß zu einem Duodecimal-Cubik-Zoll
„nur ein Bruch eines Decimal-Cubik-Zolls
„nöthig seyn" (nur ein Fragment davon).

Und dieser Bruch von einem Decimal-Cubik-Zoll ist nun

$\frac{1000}{1728}$ eines ganzen Decimal-Cubik-Zolls,
oder $\frac{500}{864}$ oder $\frac{250}{432}$ oder $\frac{125}{216}$ oder $\frac{62\frac{1}{2}}{108}$ eines ganzen Cubik-Zolls.

Was also von dem ganzen Decimal-Cubik-Zoll hinweggeschnitten werden darf, beträgt $\frac{91}{216}$ weil ($1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$ ausmacht. Was nach dieser Hinwegnahme übrig bleibt, ist noch der Gehalt eines Duodecimal-Cubik-Zolls.

Stellt man sich vor, der ganze Decimal-Cubik-Zoll bestehe aus 216 gleichen prismatischen (*) (dünuen vierekkigten) Stükken oder Schnitten, so darf man
91 solche Stükke hinwegnehmen, und das übrig bleibende Prisma hat noch den Cubik-Innhalt von 1 Duodecimal-Cubik-Zoll. Es besteht noch aus 125 solchen prismatischen Schnitten.

Diese Unter-Abtheilung in 216 kleine Schnitte oder Prismata ist aber nicht gewöhnlich, und hat für die Vorstellung etwas beschwerliches. — Man nehme also lieber zuerst an, der Duodecimal-Cubik-Zoll bestehe aus

---

(*) Man wird unten in dem Abschnitt XXI. Erläuterungen über solche prismatische Körper finden, und es möchte immer gut seyn, schon jezt in diese Blätter einen Blik zu werfen.

10 gleichen primatischen Stükken oder Schnitten; so werden $5\frac{85}{108}$ solcher kleinen Prismen zureichen, (oder etwas weniges über $5\frac{3}{4}$ derselben) um den Gehalt von einem Duodecimal-Cubik-Zoll noch übrig zu lassen. Dieses ergiebt sich durch die Proportion:

$$216 : 125 = 10 : 5\,\frac{170}{216} \text{ oder } 5\,\frac{85}{108}.$$

Wenn die lezte Zahl $5\frac{81}{108}$ heissen würde, so betrüge solche in aller Strenge $5\frac{3}{4}$. Damit sieht man, daß der erwähnte Gehalt etwas höher fällt. — Bei dieser Annahme der Abtheilung dürften diesemnach

$4\frac{15}{108}$ solche kleine Prismen

von den 10 Prismen, aus welchen der ganze Decimal-Cubik-Zoll als bestehend gedacht wird, hinweggeschnitten werden; der Rest würde noch = 1 Duodecimal-Cub. Zoll ausmachen.

Man rükke in dieser Vorstellung gleichförmig etwas vorwärts, und nehme nun ferner an:

„der Decimal-Cubik-Zoll bestehe aus 100 gleichen „Prismen.“

Es werden $57\frac{47}{54}$ oder beinahe $57\frac{7}{8}$ solcher Prismen zu dem Innhalt eines Duodecimal-Cubik-Zolls zureichend seyn; und daher $42\frac{7}{54}$ sich von den 100 gleichen prismatischen Stükken des Decimal-Cubik-Zolls hinwegnehmen lassen. Der Rest wird einem Duodecimal-Zoll im Gehalt noch gleichkommen.

Dieses alles ist aus Nachsicht für gemeine Rechner so vorgetragen. Der Decimal-Rechner verschafft sich die Uebersicht hievon viel kürzer und leichter auf

folgende Weise; Er denkt so: 1728 Duodec. Cubik-Zoll sind gleich zu achten 1000 Decimal-Cub. Zollen; also 1 Duodec. Cub. Zoll muß gleich seyn.... wem? Die Antwort giebt die Proportion.

$$1728 : 1 = 1000 : \frac{1000}{1728}$$

$$\text{oder} = 1000 : 0{,}5787037$$

Nemlich, das Fragment eines ganzen Decimal-Cub. Zolls, das zu einem Duodecimal-Cub. Zoll zureicht

beträgt $\frac{1000}{1728}$ oder 0,5787037

also etwas weniger, als 0,600000

oder diese Gröse fällt zwischen $\frac{5}{10}$ und $\frac{6}{10}$ eines Decimal-Cub. Zolls. Demnach ist

$\frac{6}{10}$ eines Decimal-Cub. Zolls etwas weniges mehr, als ein Duodecimal-Cubik-Zoll.

Genauer genommen: (0,5787) . Decim. Cub. Zoll ist = 1 Duodec. Cub. Zoll.

Da nun das Verhältniß gewiß nicht zu bestreiten ist, daß

1 : zu 0,5787 . . wie 10 zu 5,787 . .

und wie 100 zu 57,87 . .

ganz und gar sich verhalten, so erkennt man aus dieser Zusammenstellung sogleich klar, daß, wenn ein Decimal-Cub. Zoll in 10 gleiche Prismen zerschnitten würde, von denselben 5,787 . . . zureichen müssen zu 1 Duodec. Cub. Zoll. Wenn aber 100 gleiche Prismen, als konstituirende Theile des Decimal-Cubik-Zolls gesezt würden, daß 57,87 . . . dergleichen eben den erwähnten Duodecimal-Cubik-Zoll ausmachen werden.

Weil nun aber dem Decimal-Rechner nicht fremd ist, daß 5,78.., nahe an 5,75 oder an $5\frac{3}{4}$ und 57,87 nahe an 57,875 oder $57\frac{7}{8}$ liegen, so fällt er im Augenblik darauf, die oben erwähnten Näherungs-Zahlen auszusprechen.

Ihm ist es nun aber weiter eben so leicht, auch 1000 Theile oder 10000 dergleichen anzunehmen, und daher zu sprechen:

578,7037 oder $578\frac{7}{10}$ solcher Theile
sind einem Duodecimal-Cub. Zoll gleich.

Daraus folgt eben so leicht in der Umwendung die Gröse des von einem Decimal-Cubik-Zoll abzuschneidenden Stüks. Bei der Unter-Abtheilung in 10 Theile sind 4,2129... dergleichen zuläßig (zum Hinwegnehmen;) oder etwas über $4\frac{2}{10}$ solcher Stükke; bei 100 Theilen aber 42,129... oder etwas sehr weniges über $42\frac{1}{8}$ solche Theile. Bei der Annahme von 1000 Theilen aber 421,29... oder beinahe $421\frac{3}{10}$.

Gewiß ist doch hiebei nicht zu mißkennen, daß z. B. bei der Zahl 4,2129... der Ausspruch, es sey $4\frac{2}{10}$ (mit dem kleinen Ueberschuß) zuläßig, mit einer viel leichter zu fassenden Vorstellung verbunden sey, als wenn man $4\frac{23}{108}$ vor sich bekommt (wie S. 38.) und über den wirklichen Gehalt hievon erst Erwägungen anstellen, auch wohl eine Nachrechnung führen muß.

Aus dem bisherigen Vortrag ergiebt es sich ganz ohne künstliche Wendung, daß auch

alle Brüche von $\frac{1}{1728}$ bis $\frac{1727}{1728}$ sich in Decimal-Ausdrükken müssen darstellen lassen, und daß Gebrauch hievon zu machen sey, so oft in Rechnungs-Säzzen Zahlen, wie etwa folgende, vorkommen:

3 Cub. Zolle 5 Cub. Lin. $= 3\frac{5}{1728}$ Duod. Cub. Zolle.
Der Decimal-Ausdruk ist $= 3{,}0028935$. Cub. Zolle.

Es dient in sehr vielen Fällen, daß man sich vorzüglich die Werthe der ersten 10 Brüche dieser Art in Decimalen merke. Sie sind folgende:

$\frac{1}{1728} = 0{,}0005787037$	$\frac{6}{1728} = 0{,}003472222$
$\frac{2}{1728} = 0{,}001157407$	$\frac{7}{1728} = 0{,}0040539259$ 09259
$\frac{3}{1728} = 0{,}001736111$	$\frac{8}{1728} = 0{,}004629629$
$\frac{4}{1728} = 0{,}0023148148$	$\frac{9}{1728} = 0{,}00208333$
$\frac{5}{1728} = 0{,}0028935185$	$\frac{10}{1728} = 0{,}005787037$

Man kann eine Menge Folgerungen daraus ableiten, welche im praktischen Gebrauch gar vielfältig dem Rechner und Geometer zu statten kommen.

Aus dem Saz des obigen Beispiels erkennet man mit einem Blik, daß

3 Cub. Zoll 5 Cub. Lin. des Duodec. Maases
sehr nahe an $3\frac{3}{1000}$ Cub. Zoll. reichen.

Sind aber unter $3\frac{5}{1728}$ Cubik-Schuhe verstanden,

so betragen $\overset{\mathrm{I}}{3}\ \overset{\mathrm{II}}{5}$ des Duodec. Cubik-Maases

soviel, als 3,002835... Cub. Schuhe, oder

$3^{\mathrm{I}}\ 2^{\mathrm{II}}\ 835^{\mathrm{III}}$; oder 3 Cub. Sch. 2 Dec. Cub. Zolle
835 Cub. Lin.
des Decimal-Maases.

Die Zahl liegt also nahe an $3^{\mathrm{I}}\ 3^{\mathrm{II}}$; erreicht aber die lezte Gröse der Cubik-Zolle nicht völlig. Es kommt nun auf die Umstände an, ob man sich bei Cubik-Zollen noch eine solche Näherung gestatten darf oder nicht, welche, wenn Cubik-Linien am Ende ausgesprochen werden, meistens zulässig ist.

Bei Cubik-Ruthen treten ähnliche Betrachtungen ein, so oft kleinere Bruch-Theile vorkommen, welche bis unter Cubik-Zolle hinablauffen. Brüche von Cubik-Linien achtet man dabei fast niemals mehr.

XIte Frage.

Wie läßt sich denn die Lehre von Irrational-Grösen Meßkünstlern, welche derselben, wie man sehr oft hört, bei gar vielen Ausrechnungen von Flächen und Längen bedürfen sollen, und doch keine vollkommene Bildung in ihrem ersten mathematischen Unterricht erhalten haben, am leichtesten noch beibringen?

Antwort. Es scheint zu diesem Zwek am räthlichsten zu seyn, daß man zuerst Betrachtungen über die ganz einfache Aufgabe anstelle, welche dahin geht,

die Diagonal-Linie in einem Vierek, dessen Grund-Linien genau 1 Schuh oder 1 Zoll lang

sey, durch Rechnung ausfindig zu machen, und den kürzesten Ausdruk für den Werth dieser Diagonale zu finden.

Eben dieser Ausdruk ist das, was man eine Irrational-Grösse nennt; insoferne nehmlich die Quadrat-Wurzel von 2, eben der Werth dieser Quer-Linie in Rechnung ist, welche in Näherungs-Zahlen mit 1,4142 ... kurz aber mit der Bezeichnung $= \sqrt[2]{2}$ ausgedrükt wird. Hievon werden sich Anfänger immer bald die Einsicht verschaffen, wenn sie ein Vierek ABCD, mit der Diagonale AD,

welche es durchstreicht, aufmerksam ansehen, und sich von dem geometrischen Saz überzeugen, daß, allgemein genommen, $(AB^2 + BD^2)$ gleich $= AD^2$ sey. Dieser in den gemeinsten Lehrbüchern erwiesene Lehrsaz muß von einem jeden Meßkünstler wohl gefaßt werden; und man kann ihm die deutliche Einsicht davon durchaus nicht erlassen. (Es ist der bekannte Pythagorische Lehrsaz). Wenn nun AB für 1 Zoll in Länge gilt, und BD ebenfalls, so ist $AB^2 = 1$ Quadrat-Zoll; und also $AB^2 + BD^2$ so viel, als die Fläche von 2 Quadraten, welche 2 Quadrat-Zolle zusammen, oder in der Summe ausmachen. Folglich ist die Vorstellung:

$(AB^2 + BD^2)$ ist $= AD^2$ für diesen Fall,
$(1 + 1) = 2$

Wenn aber das Quadrat auf der Linie AD zwei Qu. Zolle zum Innhalt hat, so muß doch

die Grund-Linie des Viereks auf AD $= \sqrt[2]{2}$, oder sie muß der Quadrat-Wurzel von 2 gleich seyn.

Dieses muß ja wohl statt haben, ganz eben so, wie ein Vierek von 4 Qu. Zollen (Innhalt) die Grund-Linie $= \sqrt[2]{4}$ oder 2 haben muß; und eines, dessen Innhalt 9 Q. Zolle hielte, die Grund-Linie $= \sqrt[2]{9}$ welches $= 3$ Längen-Zolle sind, haben muß. Es läßt sich gar kein Grund absehen, warum auf diese Weise nicht jederzeit rükwärts geschlossen werden dürfte? warum dieses blos allein bei 4 und $\sqrt[2]{4}$, und bei 9 und $\sqrt[2]{9}$ gültig seyn sollte, bei 2 und $\sqrt[2]{2}$ aber nicht. Die Berechtigung zu diesem Schluß ist vollkommen gleich. Eben damit gelangt man aber zu einer Irrational-Gröse; und $\sqrt[2]{2}$ ist eben eine solche. Man hat wohl ehedem auch eine solche Gröse eine

surdische Zahl benannt.

So sind $\sqrt[2]{3}$; und $\sqrt[2]{5}$; und $\sqrt[2]{6}$; und $\sqrt[2]{7}$ und $\sqrt[2]{8}$ dergleichen Zahlen oder Zahl-Grösen. Man kann sie niemals in Zifern ganz darstellen, ob sie gleich

als Linien vollkommen sich construiren lassen, wie dann die Diagonal-Linie AD ganz gewiß eine vollkommen-genaue, und ganz bestimmte Linie ist; wogegen ihr Ausdruk in Zalen nicht ganz und gar mit Zifern sich zur völligen Genüge darstellen läßt. Man kann immer sprechen: „die Qu. Wurzel von 2,

oder $\sqrt[2]{2}$ fällt zwischen 1,414 und 1,415
oder genauer zw. 1,4142 und 1,4143
oder genauer zw. 1,41421 und 1,41422

und so kann man die Schärfe noch weiter fort treiben bis ins Unendliche; aber die lezte Zahl findet sich niemals; und tiefere Nachfragen der Neugierde hierüber sind fruchtlos.

Mit der Quadrat-Wurzel aus der Zahl 3 verhält es sich eben so. Es ist gleichfalls eine Irrational-Gröse.

$\sqrt[2]{3}$ fällt zwischen 1,732 und 1,733
genauer zw. 1,7320 und 1,7321
genauer zw. 1,73205 und 1,73206

und so kann man die kleinern Theile ins Unendliche fortsezzen. Ganz vollendet wird die Zahl niemals. Dagegen giebt es eine Linie, welche ganz vollkommen $= \sqrt[2]{3}$ beträgt, und jeder Anfänger, jedes Kind, kann sie mechanisch construiren. Wenn man in einen Zirkel, dessen Halbmesser 1 Zoll lang angenommen ist, ein gleichseitiges Dreiek einschreibt, so kommt jeder der gleichen drei Seiten die

Länge von $\sqrt[2]{3}$ zu. (*)

Dieses wird in der Elementar-Geometrie erwiesen, und kann in jedem guten Lehrbuch nachgesehen werden.

Die Anstößigkeit, daß vollkommene Linien, welche ganz sichtbar vor unserm Auge stehen, welche wir selbst ohne Fehl erschaffen können, in Zifern nicht ganz vollkommen sich ausdrükken lassen, irrt und beleidigt viele. Es ist der Ort jezt nicht, ihren Unglauben hier näher zu bestreiten.... Genug, wenn sie aus diesen Vorträgen einsehen, daß

„den Ausdrükken $\sqrt[2]{2}$ und $\sqrt[2]{3}$ sehr bestimmte „Linien in der Natur entsprechen."

Der Rechner muß neben den allgemeinen Zeichen noch Zahl-Zifern haben. Es sind ihm also die Ausdrükke 1,41425.... und 1,73205... und dergleichen mehr (unzählig-viele) ganz unentbehrlich.

Damit erkennt man nun wohl, wie man eben damit auf unendliche Decimal-Brüche hier geführt wird, und was damit gemeint sey. Die dabei vorkommende oder auch nur geahndete, wie im verborgnen liegende kleinen Theilchen hinter den 10 oder 100 Tausend-Theilchen (nach der 4ten oder 5ten Deci-

---

(*) Unten wird noch eine andre Weise gezeigt werden, wie man durch eine im Innern eines Vierecks angenommene Diagonale ebenfalls zu einer Linie = $\sqrt{3}$ gelange.

mal=Zifer) dürfen den Praktiker *nicht* in Verlegenheit sezzen, weil e i n Hundert=Tausend=Theilchen beim Aussprechen eines

Flächen= oder Körper=Maases

ganz selten noch erheblich ist, so daß allermeistens ganz wohl eines mehr oder weniger seyn mag, ohne daß darüber ein wichtiger Streit entstehen dürfte. (*)

Indessen kommen allerdings dennoch manchmal Fälle vor, wo man diese kleinen Theilchen (in der 5ten und 6ten Stelle der Zifern von dem Decimal=Strich an gerechnet) kennen muß. Aber es ist dem Decimal=Rechner leicht, sich hierüber jederzeit die verlangte Auskunft selbst zu verschaffen. Die Quadr. und Cubik=Wurzeln aus den Zahlen 2, 3, 5, 7.... u. s. f. lassen sich ja von jedem, welcher sie bis auf 3 Stellen nur auszuziehen versteht, auch bis auf 6 und 7 und 8.... ausziehen; so daß die größte Schärfe, welche man nur je verlangen mag, jederzeit erreicht werden kann.

Auch besizt man Bücher genug, in welchen bereits vorgearbeitet ist, und welche die Decimalen in groser Erstrekkung (bis auf 9 und 10 Stellen) für die

---

(*) Man findet in 2 Abschnitten meines im Jahr 1813 gedrukten Buchs: „Belehrungen in Geomet. zur Nachhülfe für Praktiker" . . ; mehrere Erläuterungen über die Anwendung der Grössen $\sqrt[2]{2}$ und $\sqrt[2]{3}$ (S. 26... bis S. 36.), worauf ich hiemit den verweise, der noch ein Mehreres hievon zu lernen begierig ist.

gedachte Irrational-Grösen genau aufgeführt enthalten, so daß man durch einfaches Nachschlagen sich hiebei jederzeit leicht helfen kann.

Etliche Quadrat-Wurzeln und Cubik-Wurzeln sollen jedoch auch eben hier sogleich zum schnellen Gebrauch für viele künftige Fälle mitgetheilt werden. Zuerst folgende Quadr. Wurzeln:

$\sqrt[2]{}$		$\sqrt[2]{}$	
2	1,4142136	6	2,4494897
3	1,7320508	7	2,6457513
4	2.	8	2,8284271
5	2,2360680	9	3.
		10	3,1622777

Hierauf eben so viele Cubik-Wurzeln:

$\sqrt[3]{}$		$\sqrt[3]{}$	
2	1,2599210	6	1,8171206
3	1,4422496	7	1,9129312
4	1,5874011	8	2.
5	1,7099759	9	2,0800837
		10	2,1544347

Hiebei kann man sich sogleich folgende Combination merken:

Bei den Quadrat-Wurzeln ist mit

$$\sqrt[2]{2} = 1,4142136$$

$$\text{auch } \sqrt[2]{200} = 14,142136 \text{ gegeben.}$$

und eben so ist mit dem Werth von $\sqrt[2]{3}$ auch $\sqrt[2]{300}$ in den mitgetheilten Decimalen gegeben, wobei also blos mit dem Decimal-Strich (vornen) gerükt wird.

Deshalb ist dann auch

aus $\sqrt[2]{10} = 3{,}1622777$

zu schließen auf $\sqrt[2]{1000} = 31{,}622777$

Bei den Cubik-Wurzeln aber folgt

aus $\sqrt[3]{2}. = 1{,}2599210$

der Werth von $\sqrt[3]{2000} = 12{,}599210$

nicht aber der von $\sqrt[3]{200}$, welcher $= 5{,}84803\ldots$ beträgt. Hiegegen verstoßen sich manche angehende Rechner. Sie würden sich aber niemals verirren, wenn sie bedächten, daß $\sqrt[2]{200}$ so viel, als $\sqrt[2]{(2 \,.\, 100)}$ bedeutet, und daß sich dieses Produkt als $(\sqrt[2]{2}) \,.\, (\sqrt[2]{100})$ oder $= 10 \,.\, \sqrt[2]{2}$ denken lasse, weil aus 100 die Quadrat-Wurzel sich rein ausziehen läßt. Daraus folgt nehmlich, daß

$\sqrt[2]{200}$ so viel als $=$ 10mal $\sqrt[2]{2}$ sey,

welches $10 \,.\, (1{,}4142136)$ oder $14{,}142136$ ausmacht.

Bei der Cubik-Wurzel aus 2000 oder $\sqrt[2]{2000}$ tritt eine ähnliche Vorstellung ein. Es ist

$\sqrt[3]{2000} = \sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{1000}$, welches

so viel als $\sqrt[3]{2} \,.\, (10)$ beträgt

also 10mal $\sqrt[3]{2}$ ist $= (10) \,.\, (1{,}2599210)$ oder

$12{,}599210$ ist $= \sqrt[3]{2000}$.

Eine reine Cubik-Wurzel aus der Zahl $\sqrt[3]{100}$ giebt es aber nicht; denn $\sqrt[3]{100}$ ist = 4,6415888, welches blos eine Näherungs-Zahl ist. Und eine reine Cubik-Wurzel aus 200 giebt es daher auch nicht, weil $\sqrt[3]{200}$ so viel, als $(\sqrt[3]{2}).(\sqrt[3]{100})$ beträgt, und weder 2 noch 100 reine Cub. Wurzeln haben. Manche Anfänger wissen sich nicht immer sogleich in diesen und ähnliche Säzze zu finden, weil sie die Betrachtung übergehen, aus welchen Factoren ein ihnen vorgelegter Cubus zusammen gesezt sey.

So wie 1000 die Cubik-Zahl von 10 ist, so ist 729 die von 9; und 512 die von 8. Es giebt grose und kleine Cubik-Tabellen, in welchen man diese zusammengehörige Zahlen antrifft, und nicht nur die erwähnten, sondern alle nach der Reihe von 1 bis auf 100, und noch weiter fort. Die von 1 bis 10 gehenden sollte jeder Rechner ohne Ausnahme sich so bekannt machen, daß er kein Buch mehr darüber aufzuschlagen nöthig hätte.

Der nächste Gebrauch davon wird folgender seyn: So wie die Cubik-Wurzel aus 2000 sich, als $\sqrt[3]{(2.1000)}$ vorstellen läßt, und dieses Produkt $= 10.\sqrt[3]{2}$ ist; so ist 729000 so viel als (729.1000) und $\sqrt[3]{(729.1000)}$ ist = 9.10 oder 90. In gleichförmigen Schlüssen fortschreitend erkennt man,

daß $\sqrt[3]{(512000)} = 80$ seyn muß, weil $\sqrt[3]{512} \cdot \sqrt[3]{1000} = 8 \cdot 10$ ist.

Eben daher ist $\sqrt[3]{343000} = 7 \cdot 10$ oder 70.

und $\sqrt[3]{216000} = 6 \cdot 10$ oder 60.

Man ersieht eben hieraus leicht, in welchen Fällen die einfache Factoren-Zerfällung wohl angehe und dienlich sey, die Cubik-Wurzel vorgelegter Zahlen bequem zu erhalten. So oft als in andern vorgelegten Zahlen nicht drei, sondern nur zwey Nullen vorkommen, d. h., so oft die vorgelegte Zahlen um $\frac{1}{10}$ niedriger stehen, z. B. 72900, oder 51200 oder 34300 . . . so oft erreicht man auf diesem Wege das Ziel nicht, die Cub. Wurzeln schnell darzustellen.

XIIte Frage.

Welche Methode ist dann die üblichste, um die Cubik-Wurzel eben aus solchen Zahlen, wie die erst angeführten sind, (aus 72900 oder 31200) heraus zu bringen?

Antwort. Die üblichste Art, diese Cubik-Wurzel zu erhalten, ist der bekannten Methode, nach welcher man Quadrat-Würzeln aus vorgegebenen Zahlen auszieht, sehr ähnlich; die Operation ist aber beschwerlicher und die einzelnen Zifern gehen bei diesem Cubik-Wurzeln-Ausziehen viel langsamer hervor; man verstößt sich mit unrichtigen Annahmen, deren Verwerf-

lichkeit man erst durch die Folge erkennet, gar häufig mit vielem Zeit-Aufwand.

Um die Gründe des mechanischen Verfahrens dabei einzusehen, muß man eine deutliche Vorstellung von dem Gehalt eines Cubus, welchen eine zweitheilige Größe, wie $a + b$ als Wurzel gestaltet, giebt, zu erhalten zu suchen. Ohne einige Kenntnis der Buchstaben-Rechnung, (allerdings aber nur der einfachsten) kommt der zu belehrende Anfänger hiebei nicht fort. Man muß es fassen, wie und warum die Entwikkelung des Cubus von $a+b$ oder $(a + b)^3$ in vier Gliedern, wie folgt, aussehe:

$(a+b)^3$ ist so viel, als $= a^3 + 3 . a^2 b. + 3 . b^2 . a + b^3$

In Zahlen ist ein Beispiel so hinzustellen:

$(2+3)^3$ ist so viel als $= 2^3 + 3 . 2^2 . 3 + 3 . 3^2 . 2 + 3^3$

oder $= 8 + 3 . 4 . 3 + 3 . 9 . 2 + 27$

$= (8 + 36 + 54 + 27)$

Die Summe ist $= 125$: und 125 ist 5^3

Eben so entwikke man

$(3+4)^2$

$= 3^3 + 3 . 3^2 . 4 + 3 . 2^2 . 3 + 64$

$= 27 + 108 + 36 + 64$

Die Summe ist 343, der Cubus von $(3+4)$ oder von 7. Er wird mit 7^3 bezeichnet.

Der Sinn der allgemeinen Formel oder des Werthes von $(a+b)^3$ in der Entwikkelung, wird gewiß jedem verständlich, der nur mehrere ganze Zahlen so zweitheilig machen, und eben so entwikkeln mag. Und damit hat er sich den Weg gebahnt um

einzusehen, wie es zugehe, daß man die richtige Cubik-Wurzel einer jeden Zahl gewiß erhält, wenn man die Zahlen nach der Weise ordnet und behandelt, welche sogleich in einem wirklichen Beispiel mit Zahlen vorgezeigt werden soll. Die Bemerkungen, welche den Zahlen zur Seite angehängt stehen, werden darauf führen, in wie ferne die einzelnen Theile, welche bei dieser Calculation als besonders gestellte Zifern vorkommen, den allgemeinen Zeichen des entwikelten Cubus von $(a+b)$ entsprechen, oder mit ihnen übereinkommen.

(Freilich läßt sich dieses alles viel füglicher durch mündlichen Unterricht, und wenn man die Zahlen nach und nach den Schülern (*) vor die Augen treten läßt, beibringen.)

Man lege sich nun einmal die Zahl 157464 vor, und die Forderung sey, aus ihr die Zahl zu finden, welche 2mal mit sich selbst multiplicirt, eben 157464 wieder gebe. Da schreibe man sie dann, wie folgt.

(*) Eine sehr gute Anweisung hierüber findet man in dem trefflichen Lehrbuch der Arithmetik von Hr. Professor Bundschue aus Kempten; im IIIten Thl. pag. 10 bis 90. In den folgenden Blättern ist manches davon zum Nuzen der Leser übergetragen.

			Die Cub. Wurzel
	157	: 464	‖ 54
Die unter 157 liegende nächste Cubik-Zahl. (Die Wurzel wird mit 5 in den Quotienten eingeschrieben.)	125	:	
Ziehe 125 ab: Rest:	32	: 464	
Das 3fache Quadr. des 1sten Theils in der Wurzel; hier 3.(5^2) oder 3.25	7	: 5	
Diese 75 als Divisor in 324 giebt die Zahl 4, als 2ten Theil der Wurzel; und alsdenn mult. 4. in 75 . .	30	: 0	
Das Qu. des 2ten Theils der Wurzel ist = 16. Und 3mal 16 ist = 48; und diese Zahl mit 5 multipl. . . .	2	: 40	
Die Cubik-Zahl des 2ten Theils der W.		: 64	
Die Summe der Producte	= 32	: 464	
Diese, abgezogen von den Zahlen der 3ten Zeile, (dem 1sten Rest) läßt übrig	=	0	

Auf diese Art ist die Cubik-Wurzel 54 gefunden.

Man sieht leicht, daß sie nicht vollkommen vorhanden seyn würde, wenn die obere Zahl des Restes

32465 oder 32466, oder 32467 ... gewesen wäre, d. h. wenn die vorgegebene ganze Zahl sich höher, als nur auf 157464 belauffen hätte. Nehmen wir an, sie wäre 157879 gewesen, so würde offenbar bei dem Abzug am Schluß der Rest geblieben seyn

von	3 2 8 7 9
abgezogen . .	3 2 4 6 4
Rest:	4 1 5

Dieses sey angenommen, und es soll jezt gezeigt werden, wie eben in diesem Fall fortgefahren werden muß.

Man hängt dem Rest 415 drei Nullen an, und geht nun darauf aus, Decimalen zu erhalten, welche nothwendig nach 54 (in der Stelle des Quotienten) folgen müssen, und als neue Theile der Wurzel erscheinen werden. Diese Wurzel-Zahl wird aber natürlich damit etwas höher, als um 54 sich jezt darstellen. Man sezzet, wie folgt, zuerst die Zahlen hin:

415:000
:
:
:
415:000,000
(87:480,0
349:920:0
:259:20
: 64
350:179:264

Nun ist $3 \cdot (54)^2 = 8748$ unterzusezzen. Weil aber diese Zahl, bei welcher die Zifern 874 unter 415 zu stehen kämen, zu hoch steht, so daß keine Division bei ihr auszuführen wäre, so muß man noch weiter 3 Nullen beifügen, und alsdenn die Operation erst fortsezzen: Nachdem man in die Stelle des Quotienten, nach 54, eine Nulle gesezt hat, so wird nun berechnet, wie

viel $3 \cdot (840)^2$ betrage, und dieses Produkt gerade unter 415000000 eingeschrieben = 874800; alsdenn aber mit 87 in die zunächst darüber stehende Zahl 415 dividirt. Der Quotient 4 giebt einen neuen Wurzel-Theile zu 540, so daß man nun 54,04 vor sich bekommt. Mit dieser lezten Zifer 4 wird ferner multiplicirt in 874800; und das Produkt 3499200 wohl geordnet (in Beziehung auf 415000000) untergeschrieben.

Dabei muß man das 2te Glied der allgemeinen Formel denken (in $a^3 + 3 \cdot aab + 3 \cdot abb + b^3$); um sich den Fortgang dieser Operation verständlich zu machen.

Sogleich darauf nimmt man das Quadrat eben der vorliegenden Zahl 4, welches = 16 ist; und mult. solches in $(3 \cdot 540)$ d. h. in 1640. Das Ptoduct: $(16 \cdot 1640)$ ist = 25920; welches das 3te Glied der allgemeinen Formel, oder $+ 3 \cdot a \cdot bb$ angeht gleich als ob stünden $(b^2) \cdot (3a)$. Diese Zahl 25920 wird nun, wohlgeordnet, eingeschrieben (259 unter 920 senkrecht.)

Endlich wird der Cubus von 4 noch eingeschrieben = 64. In der allgemeinen Formel gehört das 3te Glied hieher = b^3. Das ist jezt = 4^3.

Nunmehr addirt man die 3 erhaltenen Produkte; und zieht die sich ergebende Summe 350179264 von der obern 415000000 ab. Der Rest heißt: 64800736.

Wenn man fortfahren will, und also noch mehrere Wurzel-Theile (als Decimalen) zu erhalten wünscht, so hängt man abermals der Zahl des Restes drei

Nullen an; und die Operation beginnt alsdenn von neuem. Damit wird man $\sqrt[2]{157879} = 54,0474\ldots$ als Wurzel ans Licht bringen.

Das Verfahren, wenn die Kubik-Wurzel aus einem Bruch auszuziehen verlangt wird, ist ganz dasselbe; nur verwandle man den Bruch, wenn er als ein gemeiner ächter Bruch vorgelegt wäre, zuvörderst in einen Decimal-Bruch. Man sezze

$$\text{z. B. } \sqrt[3]{\left(\tfrac{2923}{5000}\right)} = \sqrt[3]{0,58460}.$$

In Kürze alles zusammengestellt, ist der Wurzel-Auszug bis auf 3 Decimal-Stellen folgender:

0,584	:	600	‖ 0,836...
0,512	:		‖
72	:	600	
(19	:	2)	
57	:	6	
2	:	16	
	:	27	
59	:	787	
12	:	813000	
(2	:	0667)	
2	:	4002	
	:	8964	
	:	216	
12	:	490056	
		322944000	

Bemerkung.

Man findet diese Zahl 0,5846 als Aufgabe zu einem Cubik-Wurzel-Auszug in Vega's Vorles. über die Mathem. im 1sten Theil. S. 156. der zweyten Edition von 1793. Aber es ist dabei eine irrige Rechnung eingeschlichen, nach welcher die Wurzel = 0,844 angegeben wird. Die Unrichtigkeit beginnt bei dem Einsaz der Zahl nach 12813000, wo der Divisor 20667 heißen muß, nicht aber 82668, wie aus Versehen in Vega's Buch steht. Der Fehler kam wohl nicht von ihm selbst her.

Man merke sich hiebei, was allgemein bei ächten Brüchen, aus welchen man Wurzeln auszieht, gültig ist, daß die Cubik-Wurzel

„aus einem ächten Bruch jederzeit größer „(im Werth) ist, als der vorgegebene Bruch „selbst; aber doch jedesmal noch ein ächter „Bruch bleibt.“

So ist 0,836... größer, als 0,584... offenbar; aber immer ein ächter Bruch, (kleiner als 1.)

Wäre die Aufgabe, aus einem Bruch, welcher 0,05846 hieße, die Cub. Wurzel auszuziehen, so wird man dieselbe finden = 0,38810... also abermals größer als 0,05846, die vorgegebene Cubus-Größe. Dabei ist der erste Ansaz so zu machen:

0,058	: 460	0,38...
27	:	
31	: 460	
. . .	: . . .	
2	: 7	
2	: 16	
	576	
	512	
	27872 u. s. f.	

Wer hier sich verleiten ließe, die 2te Zifer statt 8 mit 9 anzunehmen, würde erst durch den Erfolg ersehen, daß 9 eine zu hohe Zifer seye. Denn die nächstfolgenden 3 Zahlen würden so hoch damit ausfallen, daß deren Summe 32319 seyn würde, (anstatt 27872). Aber 32319 läßt sich von 31460 nicht abziehen. Daraus würde man daher den Mißgriff erkennen, und wer ihn begangen hätte, müßte demnächst erst von 9 auf 8 zurükgehen, oder 0,38 als

die richtigern ersten Theile der Wurzel einsezzen, und nicht 0,39 . . .

XIIIte Frage.

Da hiebei so sehr viel in Acht zu nehmen ist, und man so leicht sich verstoßen kann, sollte es dann nicht andre mehr sichere Wege geben, um den Betrag von Cubik-Wurzeln wenigstens in Näherung zu erfahren? Sollte man sich der schon gefertigten Cubik-Tafeln, in welchen man die Würfel aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100 und 200... antrifft, nicht bedienen, und gewöhnliche Brüche damit zusammen sezzen können, so daß man durch die Werthe dieser Zusammensezzungen correspondirende Wurzeln erhielte?

Antwort. Man hat wohl schon längst solche Versuche gemacht, um dem verdrüßlichen Cub. W. Ausziehen auszuweichen. Allein, seit dem man die Vortheile ersehen hat, welche die Anwendung der Logarithmen bei diesem Geschäft gewähret, ist dieser Weg selten mehr eingeschlagen worden. Weil aber doch viele Rechner und Geometer mit Logarithmen nicht umgehen wollen, oder nicht können, so sind noch jezt vorsichtige Versuche hierüber, um etwas gedeihliches zu Stande zu bringen, nicht zu verwerfen.

Allein man hat hiebei nicht blos etliche wenige, sondern in der That viele schon in voraus bearbeitete Brüche, ja ganze Reihen von Brüchen nöthig, um die Wurzeln von vorgegebenen Cubik-Grössen schnell zu bekommen. Auch zeigt es sich

sehr bald, daß bei diesem Geschäft, (wie bei so vielen andern) wieder die Verwandlung der gedachten Brüche in Decimal-Ausdrükke sich gar nicht entbehren lasse.

Worauf es hiebei aber eigentlich ankommt, wird sich, wie mir scheint, in einem umständlich-ausgeführten Beispiel füglicher offen darlegen lassen, als wenn über die Theorie dieser Calkuls-Behandlung zum voraus viele allgemeine Säzze ausgesprochen würden.

Man stelle zuerst eine Reihe von 15 Brüchen vor sich hin, welche Cubik-Zahlen, und deren Wurzeln enthalten.

Cubik-Größen.	Die Cubik-Wurzeln sind:
$(\frac{26}{25})^3$ od. $\frac{17576}{15625} = 1,12486$	$\frac{26}{25} = 1,040$
$(\frac{25}{24})^3$ od. $\frac{15625}{13824} = 1,13028$	$\frac{25}{24} = 1,04166$
$\frac{13824}{12167} = 1,1361$	$\frac{24}{23} = 1,04347$
$\frac{12167}{10548} = 1,14265$	$\frac{23}{22} = 1,04545$
$\frac{10648}{9261} = 1,15056$	$\frac{22}{21} = 1,0476$
$\frac{9261}{8000} = 1,15762$	$\frac{21}{20} = 1,05$
$\frac{8000}{6859} = 1,16905$	$\frac{20}{19} = 1,0526$
$\frac{6859}{5832} = 1,17609$	$\frac{19}{18} = 1,05555$
$\frac{5832}{4913} = 1,18705$	$\frac{18}{17} = 1,05882$
$\frac{4913}{4096} = 1,19946$	$\frac{17}{16} = 1,0625$
$\frac{4096}{3375} = 1,21362$	$\frac{16}{15} = 1,06666$
$\frac{3375}{2744} = 1,22995$	$\frac{15}{14} = 1,07142$
$\frac{2744}{2197} = 1,24897$	$\frac{14}{13} = 1,07692$
$(\frac{13}{12})^3 = \frac{2128}{1728} = 1,27141$	$\frac{13}{12} = 1,0833$
$(\frac{12}{11})^3 = \frac{1728}{1331} = 1,29827$	$\frac{12}{11} = 1,0909$

Diese 15 Brüche geben uns die Wurzeln für alle Cubik-Grösen, welche zwischen $1\frac{1}{10}$ und $1\frac{3}{10}$ fallen, in ziemlich großer Näherung an, indem der erste Bruch 1,124 . ,. nur wenig über $1\frac{1}{10}$ oder 1,10 liegt; der lezte aber 1,298... sehr nahe an 1,300 oder 1,3. Allein man kann eben diese berechneten Werthe auf eine leichte Art anwenden, um noch weit mehrere andere Zahlen, als die nnr hier vorliegenden, mit ihren Cubik-Wurzeln dadurch zu errathen.

Erste Anwendung. Nicht blos bei der Annahme einer Cubik-Größe, welche genau 1,1248 beträgt, ist die Cub. Wurzel-Größe dabei, 1,040 zu dem vorgesezten Zwek dienlich; sondern auch bei Annahme einer Größe, wie etwa 1,1238; oder 1,124; oder 1,1248... oder 1,1245 sind, ist eben die Wurzel-Größe 1,040 in Näherung noch brauchbar, indem solche auch bei $\sqrt[3]{}(1,124)$ statt der mehr streng-berechneten Zahl 1,03973 ... sich füglich noch anwenden läßt, da 1,040 nicht einmal um $\frac{3}{10000}$ gegen den wahren Werth zu hoch steht. Eben so wird für die Cub. W. aus $1\frac{1}{8}$ oder aus 1,125 diese Zahl 1,040 gebraucht werden dürfen, da die ganz-scharfe Wurzel-Zahl von $1\frac{1}{8}$ welche 1,04004 ist, auch nicht ein Hunderttausend-Theilchen mehr ausgiebt. (*) Mit diesen 15 Bruch-

(*) Noch ein Beispiel giebt die Cubik-Wurzel aus 1,2, welche, streng genommen, 1,0626 beträgt. In unserer Reihe finden wir bei 1,1994.. die Wurzel-Zahl 1,0625, deren große Uebereinkunft mit jener jedem in die Augen fällt.

Werthen hat man daher in der Anwendung in d r That schon wenigstens 60 andere gewonnen, bei welchen allen man der Wurzel-Zahl, wie sie in der Reihe steht, bis auf 1 Tausend-Theilchen fast immer trauen kann. Aber diese Genauigkeit läßt sich sehr viel weiter noch treiben.

2) Man denke sich, statt der Reihe der Wurzeln, welche $\frac{26}{25}$, $\frac{25}{24}$, $\frac{24}{23}$... heißt, eine andre, in welchen jeder Zähler und jeder Nenner um $\frac{1}{2}$ höher stünde, d. h.

$$\frac{26\frac{1}{2}}{25\frac{1}{2}}\ ;\ \frac{25\frac{1}{2}}{24\frac{1}{2}}\ \text{und so fort.}$$

$$\frac{53}{51}\ ;\ \frac{51}{49}\ ;\ \frac{49}{47}\ \text{u. s. f..}$$

oder 1,03214.. 1,04081.. 1,04255...

Diese Decimal-Werthe, wenn man sie mit denen der vorigen Reihe vergleicht, und auch die Würfel dieser Zahlen nimmt, und dazu stellt, geben deutlich zu erkennen, daß alle Glieder dieser 2ten Reihe zwischen die Glieder der ersten fallen. Man ordne nur einige zusammen, so sieht man das Gesez des Fortgangs sogleich:

(Um kurz zu seyn, heiße die erste Reihe uns R. I.; die zweite Reihe, R. II.) Man hat daher

	Cubus-Größen	Cubik-Wurz.
Aus R. I.	$\frac{17576}{15625}$ oder 1,12486	$\frac{26}{25}$ od. 1,040
Aus R. II.	$\frac{148877}{132651}$ oder 1,12731	$\frac{51}{49}$ od. 1,04081
R. I.	$\frac{15625}{13824}$ oder 1,13028	$\frac{25}{24}$ od. 1,04166
R. II.	$\frac{117649}{103823}$ oder 4,13317	$\frac{49}{47}$ od. 1,04255
R. I.	$\frac{13824}{12167}$ oder 1,1361	$\frac{24}{23}$ od. 1,04347

Jedes Glied der R. II. wird aus dem größern der R. I. abgeleitet, wenn man nach folgender Vorschrift verfährt:

„Das Größere Glied der R. I. werde allge-

„mein = $\frac{m}{n}$ genannt, und darauf verwandle

„man diesen Bruche in einen andern, welcher

„$\frac{2m+1}{2n+1}$ sey. Der Werth dieses Bruchs ist

„allemal ein solches Mittel-Glied der zwei-

„ten Reihe oder eine Größe zu R. II. gehörig."

Z. B. m sey = 25; n = 24; also $\frac{m}{n} = \frac{25}{24}$; Daraus bilde man $\frac{(2.25)+1}{(2.24)+1}$ das ist: $\frac{51}{49}$ der Werth des Mittel-Glieds, in R. II. stehend.

Eben so, wenn $\frac{m}{n} = \frac{24}{23}$ gilt, so ist

(2.24)+1 div. durch (2.23)+1 od. 49:47 = $\frac{49}{47}$ wieder das Mittel-Glied zwischen $\frac{25}{24}$ und $\frac{24}{23}$.

Auf diese Art kann man nun die Mittel-Glieder für alle 15 Glieder der Haupt-Reihe bilden. Die Cubi davon stellt man zur Seite, und berechnet die Werthe in Decimalen. So wird die Reihe sich schliessen mit

R. I.	$\frac{2197}{1728}$ od. 1,27141 . .	$\frac{13}{12}$ od. 1,08333
R. II.	$\frac{15625}{12167}$ od. 1,28421 . .	$\frac{25}{23}$ od. 1,08695
R. I.	$\frac{1728}{1331}$ od. 1,29827 . .	$\frac{12}{11}$ od. 1,09090

Man sieht den Vortheil dieser Zusammen-Ordnung wohl leicht ein. Wer nach der Cubik-Wurzel aus

$1\frac{5}{39}$ oder 1,12820 fragt, wird aus dieser Reihe weit sicherer auf die zugehörige Wurzel den Schluß machen, da er

1,28421 als Cub. | 1,08695 als Wurz.

vor sich sieht, als Glied in R. II. als wenn er blos die 2 Glieder der Haupt-Reihe allein kennte.

Allein die Schärfe der Näherung steigt bedeutend, wenn man noch weiter geht. Zwischen jedes Mittel-Glied und jedes Haupt-Glied läßt sich ein neues Glied einschieben, wenn man den Bruch $\frac{m}{n}$ von neuem umbildet oder verwandelt, und zwar

in einen, welcher $\frac{4 \cdot m + 1}{4 \cdot n + 1}$ heiße.

und in einen, welcher $\frac{4m + 3}{4n + 3}$ heiße.

Beispiel: Statt $\frac{25}{24}$ bilde man folgenden:

$(4 \cdot 25) + 1$ div. d. $(4 \cdot 24)$ 1 + oder $\frac{101}{97}$

und $(4 \cdot 25) + 3$ div. d. $(4 \cdot 24) + 3$ oder $\frac{103}{99}$

In Decimalen ist $\frac{101}{99}$ = 1,04123 und $\frac{103}{97}$ ist = 1,0404. Diese Werthe liegen offenbar um den des Mittel-Glieds der R. II. 1,04081 gleichsam auf beeden Seiten herum. Sie gehören in eine neue Reihe von Brüchen, welche uns R. III. heißen soll. Man nehme die Wurzel dieser Brüche, und gebe auch deren Werthe in Decimalen an. Damit wird wohl

verständlich seyn, wenn man alles jezt so zusammen ordnet:

Aus	Cubus-Größe			
R. I.	1,12486 .	$\frac{13}{12,5} = \frac{104}{100}$	od.	1,040
R. III.	1,12617 .	$\frac{25,75}{24,75} = \frac{103}{99}$	od.	1,04040
R. II.	1,12751 .	$\frac{25,5}{24,5} = \frac{102}{98}$	od.	1,04081
R. III.	1,12888 .	$\frac{25,25}{24,25} = \frac{101}{97}$	od.	1,04123
R. I.	1,13028 .	$\frac{12,5}{12} = \frac{100}{96}$	od.	1,04166

Es werde die Cubik-Wurzel aus $1\frac{12}{93}$ verlangt, d. h. aus 1,12902. Diese lezte Zahl ist also eine Cubus-Größe, und fällt zwischen 1,12888 und 1,13028. Die Cubik-Wurzel mus daher wohl 1,0413 od. 1,0414 in Näherung seyn. Vorher, bei Anwendung der Reihe auf S. 62 hätte man nur auf eine Zahl, welche zwischen 1,1275 und 1,3028 laege, rathen müssen, und die Ungewißheit würde viel größer gewesen seyn.

Geht man noch weiter, und fragt nach Gliedern einer vierten Reihe (R. IV.), so muß man die Formeln anwenden:

8 m + 1 div. durch 8 n + 1
8 m + 3 div. durch 8 n + 3
8 m + 5 div. durch 8 n + 5
8 m + 7 div. durch 8 n + 7

E

Dieses Blatt wird ausgeschnitten, und in die Cubik-Rechnung eingeschalten für S. 65 u. 66.

So oft man nun den Werth von $\frac{m}{n}$ in Brüche dieser Art verwandelt, erhält man ein neues Zwischen-Glied, zusammen 4 neue Glieder. In unserm Beispiel wird das nächste an dem Haupt-Glied 1,040 nun 1,04020 heissen, in der Reihe der Cub. Wurzeln Es geht so hervor: $\frac{m}{n}$ ist = $\frac{25}{24}$; und

(8.25) + 7. div. d. (8.24) + 7. od. $\frac{207}{199}$ ist = 1,04020

Das nächste vor dem andern Haupt-Glied, 1,04166 und über diesem stehend, wird seyn:

(8.25) + 1 div. d. (8.24) + 1 od. $\frac{201}{193}$ = 1,04145

So heißen die 2 Wurzeln. Die Cubi aber folgen daraus. Gleichmäsig auch die für die 2 andern Glieder zu R. IV. gehörig:

R. I.	1,12485 .	$\frac{208}{200}$ = 1,0400
R. IV.	1,12551 .	$\frac{207}{199}$ = 1,04020
R. III.	1,12617 .	$\frac{206}{198}$ = 1,04040
R. IV.	1,12684 .	$\frac{205}{197}$ = 1,04061
R. II.	1,12751 .	$\frac{204}{196}$ = 1,04081
R. IV.	1,12819 .	$\frac{203}{195}$ = 1,04102
R. III.	1,12888 .	$\frac{202}{194}$ = 1,04123
R. IV.	1,12957 .	$\frac{201}{193}$ = 1,04145
R. I.	1,13028 .	$\frac{200}{192}$ = 1,04166

Hier sieht man also 7 Zwischen-Glieder zwischen den zweien der Haupt-Reihe (R. I.) und überzeugt sich, daß die Glieder immer näher zusammen rükken. Sie werden es noch mehr, wenn man Glieder einer Vten Reihe berechnet. Damit würde man 15 Zwischen-Glieder erhalten. Das nächste an 1,0400 würde

gebildet durch die Formel: $\frac{16 . m + 15}{16 . n + 15}$ u. s. f.

Diese Operationen führen übrigens unvermerkt in das Geschäft hinein, welches man in der gelehrten Sprache Interpoliren nennet. In der höhern Mathematik wird gar viel durch Interpolirung ausgerichtet. Hier hat man nur etliche Beispiele dazu erhalten.

XIVte Frage.

Es leuchtet damit allerdings leicht ein, daß solche Reihen, wie die angeführten sind, mit ihren besezten Gliedern recht wohl dazu dienen, die Wurzel aus Cubik-Größen, welche nur wenig höher, als 1 liegen, (zwischen $1\frac{1}{10}$ und $1\frac{3}{10}$) leicht zu erhalten.

Allein es möchte doch wohl (scheint es) eine ausserordentlich große Menge solcher bereits im Voraus berechneten Reihen, (wie die vorliegende nur aus 15 Gliedern bestehende ist) nöthig seyn, um in jedem einzelnen wirklich in Praxi vorkommenden Fall die verlangte Wurzel einer Cubik-Größe, wie solche eben dem Rechner sich entgegenstellen möchte, schnell ausfindig zu machen?

Antwort: Eine große Anzahl solcher schon berechneten Reihen würde freilich, je größer sie wäre, um so ehe für recht viele in Concreto vorkommende Fälle dienlich seyn. Allein es läßt sich bald zeigen, daß, wenn man eine Tabelle von solchem Umfang, wie

die zum Beispiel oben angeführte von 15 Gliedern der Haupt-Reihe besizt, und dazu nur noch die Zwischen-Glieder von N. II. in Würfeln und Wurzeln, man damit unzählige Cubik-Wurzeln auch von andern Zahlen, als die, welche eben zwischen $1\frac{1}{10}$ und $1\frac{2}{10}$ stehen, vermittelst einer kurzen Reduction, immer bald finden könne. Man fasse dieses so:

Wenn nach der Cubik-Wurzel von 9 gefragt würde, so findet sich freilich 9 gar nicht unter unsern 15 Gliedern der Haupt-Reihe, welche von 1,12486 anheben, und bis auf 1,29827 gehen. Aber man denke sich, daß die Frage nicht nach $\sqrt[3]{9}$, sondern nach $\sqrt[3]{(\frac{9}{8})}$ gehe, und stelle sich $\frac{9}{8}$ im Decimal-Ausdruk vor $= 1,125$. Diese Zahl fällt zwischen 2 Glieder unserer Haupt-Reihe, nehmlich zwischen 1,2486 und 1,13029 und, insoferne wir bereits das Zwischen-Glied zu N. II. gehörig kennen, zwischen 1,2486 und 1,12751... Die Wurzeln kennen wir ebenfalls, welche zu diesen 2 Würfeln gehören 1,04 und 1,04081. Damit sind wir ganz versichert, die Wurzel von $\frac{9}{8}$ liege zwischen diesen 2 Zahlen.

Genauer aber zeigt sich der Näherungs-Werth, wenn wir das Glied der N. IV. dazu berechnet haben. Aus dem vorigen Blatt kennen wir es:

N. IV. | 1,12551... || 1,0404... (als Wurzel)

Der Schluß, daß die Cub. W. aus 1,125 entweder 1,0402 oder 1,0401 sey, ist also sehr natürlich, insoferne man $\sqrt[3]{1,12486} = 1,0400$ zur Vergleichung

nimmt. Ist man nun so weit, so schließt man das Geschäft mit einer kurzen Folgerung:

„Wenn die Cub. Wurzel aus $\frac{9}{8}$ die Zahl 1,0401
„ist, so muß die Cub. Wurzel aus 9 das doppelte
„dieser Zahl seyn, also 2,0802, (weil die Cubic-
„Wurzel von 8 bekanntlich 2 ist.)

Man geht also von $\frac{9}{8}$ auf 8. ($\frac{9}{8}$ | d. h. auf 9 zurük, d. i. zu der Zahl der Aufgabe selbst.

Die streng berechnete Cubik-Zahl aus 9 ist 2,08008... wofür 2,0801 gilt, und man ersieht hieraus, daß die durch unser Verfahren erhaltene Zahl nur um 1 Zehentausend-Theilchen zu hoch steht.

Zweites Beispiel. Es werde nach der Cubik-Wurzel aus 34 gefragt. Man nehme dafür an, die Frage gehe nach $\frac{34}{27}$, welches in Decimalen $= 1,25925$ ist.

In unserer Haupt-Reihe, und dem Glied aus R. II. sogleich dazu genommen, finden sich folgende Zahlen schon vor:

R. I.	1,24897 ...	1,0769 $= \frac{14}{13}$
R. II.	1,25971 ...	1,0800 $= \frac{27}{25}$
R. I.	1,27141 ...	1,0833 $= \frac{13}{12}$

Hier erkennt man sogleich, daß $\sqrt[3]{(\frac{34}{27})}$ sehr nahe an 1,080 liegen müsse, weil 1,25925 so sehr nahe an dem Mittel-Glied (R. II.) liegt, an 1,25971. Doch steht 1,25971 etwas zu hoch; also auch die Wurzel. Man sezze also für 1,080 die Zahl 1,0799 ein; und stelle damit den Saz als gültig auf:

$\sqrt[3]{(\frac{34}{27})}$ ist = 1,0799

Folgerung: Das dreifache hievon muß seyn:

$\sqrt[3]{34} = 3 \cdot (1{,}0799) = 3{,}2397.$

Diese Zahl ist abermals bis auf 1 Zehntausend-Theilchen gültig, indem die strenge Rechnung die verlangte Cub. Wurzel als 3,23961.. darstellt.

Drittes Beispiel: Wenn eine viel größere Zahl, als 34, vorgelegt wäre, z. B. die Zahl: 34012; so würde man zuerst durch 1000 dividiren, alsdenn durch 27, wie vorher; $\frac{34012}{1000 \cdot 27}$ ist = $\frac{34{,}012}{27}$ = 1,25970.

Hier hat man jezt eine Zahl, welche mit der in unsern Reihen aufgeführten 1,25971 äusserst genau übereintrifft. Die Wurzel, welche darneben stehet, 1,080, wird daher ganz gültig seyn. Weil aber 1000 und 27 als Divisoren angenommen worden, so ist die Zahl 1,080 mit (10 . 3) zu multiplieiren, d. h. es ist zu sezzen (10,80) . 3 = 32,4 womit man die verlangte Cub. Wurzel aus 34012 vor sich hat.

Viertes Beispiel. Wenn die Cub. Wurzel aus $4\frac{2}{11}$ gesucht werden soll, welches 4,18181.. gleich ist, so wird hier weder die Division durch 8, noch durch 27 uns dienlich seyn, wohl aber durch $\frac{27}{8}$ oder, was eben so viel ist, der Bruch $\frac{8}{27}$ als Factor in 41,8181 wird uns zum Ziel fördern. Denn 8 . (4,18181)

div. durch 27 ist = 1,23636... Diese Größe fällt zwischen 2 Haupt-Glieder unserer Reihe zwar nicht ganz auf das Mittel-Glied (R. II.) selbst, aber doch nahe an dasselbe hin. Denn die Zahlen der Reihen sind:

R. I.	1,22995	Wurz. $\frac{15}{14}$ od. 1,07142
R. II.	1,23908	$\frac{29}{27}$ od. 1,07407
R. I.	1,24897	$\frac{14}{13}$ od. 1,07692

Unsre Zahl aber ist: 1,23636. Wenn man aus der Wurzel $\frac{14}{13}$ das Glied aus R. IV. berechnet, welches zunächst an R. II. liegt, nehmlich nach der Formel $\frac{8m+5}{8n+5}$, hier

$(8 \cdot 14+5)$ div. d. $(8 \cdot 13+5)$ od. $\frac{117}{109} = 1{,}07339$ und den Cubus hievon nimmt, so erhält man 1,23673, welche Zahl nun die vorgegebene (1,23636) nur gar sehr wenig übersteigt; und man ersieht hieraus, daß die Wurzel, welche hier paßt, 5 = 1,0734 od. 1,0735 seyn werde. Diese Größe aber muß man $\frac{3}{2}$ mal nehmen, (weil oben durch $\frac{27}{8}$ dividirt worden) oder man mus sezzen:

$$(1{,}0735)\ \tfrac{3}{2} = 1{,}61025.$$

Diese Zahl gilt nun für die gesuchte Cubik-Wurzel aus $4\frac{2}{11}$ in Näherung. (In größerer Schärfe ist die Wurzel 1,6110 . . .)

In allen diesen Beispielen ist angenommen, daß die Zahlen, deren Cub. W. gesucht werden, höher als 1 liegen, also ganze Zahlen, oder unächte

Brüche seyen. Allein auch auf alle Aufgaben, in welchen selbst ächte Brüche vorkommen, deren Wurzel man sucht, ist diese Methode leicht auszudehnen. Man darf die Brüche nur in Decimalen verwandeln, und hierauf diese (alle unter 1 liegende Größen) mit 8 oder 27, oder $\frac{27}{8}$ oder $\frac{64}{27}$ u. s. f. multipliciren.

Z. B. wenn die Cubik-Wurzel aus $\frac{1}{3}$ verlangt wird, so denkt man $\frac{1}{3}$ = 0,3333... und nimmt an, es sey nach $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)$ gefragt worden, d. h. man nimmt $\frac{1}{3}$ nun $3\frac{3}{8}$mal; welches dann $1\frac{1}{8}$ oder 1,125 beträgt. Die Cubik-Wurzel aus 1,125 läßt sich leicht mittelst unserer Reihen finden, wie oben gezeigt worden. (S. 61.) Sie ist = 1,04004... Diese Zahl ist nun mit $\frac{2}{3}$ zu multipliciren, weil der Faktor $\frac{27}{8}$ der Cubus von $\frac{3}{2}$, und diese Zahl jezt umzukehren ist. Also $\frac{2}{3} \cdot (1{,}04004)$ ist die verlangte Cubik-Wurzel = 0,69336... Damit ist $\sqrt[3]{(0{,}3333..)}$ gefunden.

Wenn die Cubik-W. aus dem Bruch 0,547708.. gesucht würde, (oder auch aus einem nur nahe liegenden andern Bruch) so würde die Multiplikation mit $\frac{64}{27}$ oder $2\frac{10}{27}$ dienlich seyn. Denn $(\frac{64}{27})$ 0,547708) beträgt = 1,29827.. und dieser Zahl gehört die Cubik-Wurzel 1,09090 zu, wie das lezte Glied der Haupt-R. solches zeigt (S. 60.) Aber eben diese Wurzel ist jezt mit $\frac{3}{4}$ zu multipliciren, (weil der Cub. von $\frac{3}{4}$ ja $\frac{27}{64}$ ist). So erhält man = 0,81818.. und diese Zahl ist die Cub. W. aus 0,547708...

Manchmal werden freilich auch die Factoren $\frac{27}{8}$ und $\frac{64}{27}$ als Hülfs-Größen nicht die dienlichsten seyn, sondern man wird $\frac{125}{8}$ oder $\frac{125}{64}$ vorziehen müssen, um die Reduction auf eines der 15 Haupt-Glieder der R. I. zu Stande zu bringen. Dadurch wird die Vorarbeit allerdings beschwerlicher. (*) Aber die Nacharbeit (das Geschäft am Schluß) der Multiplikation mit $\frac{2}{5}$, oder $\frac{3}{5}$ oder $\frac{4}{5}$ ist alsdenn immer leicht.

Aus allen diesen Ausführungen gehet so viel hervor, daß dieses ganze Geschäft in vielen Fällen eine kluge Vorsicht erfordert, daß man aber dabei allerdings jedesmal das vorgesezte Ziel sicher erreichen könne.

(*) Einen ächten Bruch z. B. 0,48476 mit 125 zu multipliciren finden viele, welche mit Decimalen fertig umzugehen nicht geübt sind, beschwerlich. Diesen diene die Regel: man sehe 125 an, als stünde $(1\frac{1}{4}) \cdot 100$ (weil $(1,25) \cdot 100$ doch gewiß $= 125$ beträgt). Nun nimmt man den vorgelegten Bruch 0,48476 ein und $\frac{1}{4}$ mal, welches immer sehr leicht ist; (1) $=$ 0,48476

$$\begin{array}{rr} (1) = & 0{,}48476 \\ (\frac{1}{4}) = & 0{,}12119 \\ \hline & 0{,}60595 \end{array}$$

so ergiebt sich das verlangte Product: $0{,}60595 \cdot (100)$ ohne Mühe $= 60{,}595$, als die rechte Zahl.

Zum Schluß verdienen noch folgende Bemerkungen wohl erwogen zu werden:

1) So wie man alle Zwischen-Glieder der Haupt-Reihen-Glieder findet, wenn man von dem höhern Bruch der R. I. ausgeht, so kann man auch von dem niedrigen oder der andern Größe der R. I. ausgehen, z. B. wenn $\frac{26}{25}$ und $\frac{25}{24}$ Glieder der Haupt-Reihe sind, von $\frac{26}{25}$, als der kleinern Größe $= 1{,}04$ und nicht von $\frac{25}{24}$, welcher Bruch $= 1{,}04166$ ausmacht; also der größere ist. Wenn man aber dieses thun will, von dem kleinern Haupt-Glied auszugehen, so muß man die Vorschrift der Umbildungen, wie folgt, ändern:

Aus $\frac{26}{25}$ werden gemacht $\frac{2.26-1}{2.25-1}$. Dieses giebt das Mittel-Glied der R. II. so gut, als wenn man sezt:

$$\frac{2.25+1}{2.24+1} = \frac{51}{49}, \text{ weil } \frac{52-1}{50-1}$$

ganz eben so viel beträgt.

Eben so findet man die 2 Glieder von R. III. wenn man sezt:

$$\frac{4.26-1}{4.25-1} = \frac{103}{99}, \text{ und } \frac{4.26-3}{4.25-3} = \frac{101}{97}$$

Es sind eben dieselben Zahlen, welche man durch

$$(4.25+3) \text{ div. d. } (4.24+3) = \frac{103}{99}$$

$$\text{und } (4.25+1) \text{ div. d. } (4.24+1) = \frac{101}{97}$$

erhält. So kann man fortfahren, und man erkennt, daß: $8 \cdot 26 - 1$ so viel als $8 \cdot 25 + 7$ sey,

auch $16 \cdot 26 - 1$ so viel als $16 \cdot 25 + 7$

Allgemein geht daraus hervor, wenn, wie bisher, in R. I. der Bruch $\frac{m}{n}$ deu höhern (im Werth) bedeutet, und dagegen $\frac{p}{q}$ den andern Bruch, den niedrigen in R. I. vorstellt, so ist durchgehends

so wie $8 \cdot m + 7 = 8 \cdot p - 1$

und $8 \cdot n + 7 = 8\ q - 1$

also auch: $\frac{x \cdot m + r}{x\ n + r} = \frac{x \cdot p - r}{x\ q - r}$

Es kann oft vortheilhaft seyn, daß man von dem niedrigen Bruch-Werth ausgehe, in R. I. und die Rechnung von da ausführe, nicht von der höhern Zahl. Auch kann man mit Anwendung dieser Formel die Probe über seinen geführten Calkul machen.

Zweite Bemerkung: Man kann, wenn man das erste Zwischen-Glied hat zwischen den 2 Haupt-Grössen der R. I. dieses Zwischen-Glied zu einem Glied einer Haupt-Reihe machen, wenn man die Haupt-Glieder im Zähler und Nenner beede verdoppelt.

Z. B. . R. I. . . . $\frac{26}{25}$ d. i. $\frac{52}{50}$

R. II. . . . $\frac{51}{49}$

R. I. . . . $\frac{25}{24}$ d. i. $\frac{50}{48}$

Hier sieht man, daß, wenn $\frac{52}{50}$, $\frac{51}{49}$, $\frac{50}{48}$ gesezt werden, diese 3 Glieder, als zu R. I. gehörig angesehen werden können. Geht man von da aus weiter auf neue

Zwischen-Glieder, so werden neue Glieder von R. II, seyn, was vorher Gl. von R. III. waren, u. s. w.

Dritte Bemerkung: Man kann die Reihe von 15 Gliedern leicht erweitern von $\frac{12}{11}$, ferner auf $\frac{11}{10}$, auf $\frac{10}{9}$; auf $\frac{9}{8}$ fortlaufen lassen; und dann die Werthe der Würfel gleichförmig beisezzen, wie oben. Man wird sich dadurch das Geschäfte beim Reduciren vorgelegter Größen auf ein Reihen-Fach zwar erleichtern; Allein die Glieder der Größen in R. I. liegen am Ende weit auseinander; z. B.

$\frac{64}{27} = 2,37037\ldots$ || $\frac{4}{3} = 1,3333$

$\frac{27}{8} = 3,375$ || $\frac{3}{2} = 1,5.$

und man wird nun beim Einschalten gar oft bis auf Glieder der R. V. uud R. VI. ja noch weiter, eingehen müssen, und gleichsam tiefer hinein, als vorher, wo die Glieder der Haupt-Reihen enger an einander lagen, wie die ersten unserer Reihe von 15 Gliedern, nehmlich

$1,12486\ \ldots$ || $\frac{26}{25} = 1,04$

$1,13028\ \ldots$ || $\frac{25}{24} = 1,04166$

Wer hierüber nachdenkt, wird die übrigen Vortheile, welche bei diesem Verfahren sich erzielen lassen, bald selbst finden. Er erhält eben dadurch, ohne darauf auszugehen, den Haupt-Schlüssel in die ganze große Lehre der Interpolation.

XVte Frage.

Eine noch andere Methode, Cubik-Wurzeln ausziehen,

schreibt sich von Newtons Untersuchungen über die unendlichen Reihen her, und ist eine Ableitung von gewissen durch ihn entdekten Gesezzen in der höhern Arithmetik. Es soll hier nur das, was zum mechanischen Gebrauch dient, davon beigebracht werden. Wer fleißig darüber nachdenkt, wird seine Mühe wohl belohnt finden; und dadurch gereizt werden, nähere Entwikkelungen in mehreren gelehrten Werken nachzusuchen, welche auf viele andere Säzze führen, wozu in diesen unsern Blättern kein Raum ist. Es wird bei dieser Methode jederzeit vorausgesezt, man kenne bereits bei jeder vorgelegten Zahl, aus welcher man die Cubik-Wurzel verlangt, eine der vordersten Zifern dieser Wurzel.

Zum Beispiel: Wenn nach $\sqrt[3]{15,625}$ gefragt würde, so wird die Einsicht vorausgesezt, daß die erste Zifer der Wurzel 2 sey. Diese Einsicht kann sich jedermann gar schnell verschaffen, wenn er nur eine kleine Cubik-Zahlen-Tafel bei der Hand hat, und in solcher nach den Zahlen sich umsehen mag, welche für den vorgelegten Fall jedesmal passen. So sieht er bei 15,625, wo 15 zunächst in Betrachtung kommt, auf die Zahlen $8 = 2^3$, und $27 = 3^3$, und gelangt hiedurch nothwendig zu der Ueberzeugung, daß

$\sqrt[3]{15{,}625}$ gleich $(2+\ldots)$ seyn müsse, das heißt: 2 und dazu ein gewißer Zusaz muß die verlangte Wurzel seyn. Allgemein $(2+b)$ muß die Cubik-Wurzel von 15,625 seyn.

Diese allgemeine Vorstellung $(2+b)$ behalte man nun wohl, und gebe sich mehrere Beispiele darüber.

So wird zusammen gehören:

$$\sqrt[3]{531{,}441} = (8+b)$$

Darum, weil $512 = 8^3$ ist, also

$$\sqrt[3]{512} = 8$$

Also muß auch $\sqrt[3]{531{,}441} = (8+b)$ seyn. (*) Der Zusaz b ist allerdings noch nicht bekannt. Er ist erst aufzusuchen, und nach der erwähnten Methode wird er in Näherung bald gefunden. Dieses soll nun gezeigt werden.

Es werde das zulezt auf dem vorigen Blatt vorgetragene Zahlen-Exempel gewählt, und also die Cubik-Wurzel aus 0,5846 zu erhalten gefordert.

Die erste Zifer dieser Wurzel muß 0,8 seyn, und es muß also allgemein sich sezzen lassen:

$$\sqrt[3]{(0{,}5846)} = (0{,}8+b)$$

(*) Man schliesse diesem Gedanken auch den nächsten an: Also muß auch $\sqrt[3]{0{,}53144}$ [= $(0{,}8+b)$ seyn.

Nehmlich, bei der Annahme

$\sqrt[3]{(584,6)}$ läßt sich auf $= (8 + b)$

ganz sicher schließen; so wie bei $\sqrt{(531,441)}$ auf eine solche Zahl geschlossen worden. Auf ein $(9 + b)$ kann darum keine Vermuthung eintreten, weil

der Cubus von $9 = 729$ ist } und 584 zwischen
der Cubus von $8 = 512$ } beeden Zahlen liegt.

Durch folgende Säzze gelangt man nun jedesmal zu einem Werth von b, welcher die Wurzel in erster Näherung in sich trägt:

1) $\sqrt[3]{0,5846} = (0,8 + b)$

Also auch

2) $0,5846 = (0,8 + b)^3$; dafür man annimmt:

$= (0,8)^3 + 3 \cdot (0,8)^2 b -$

oder $= (0,512) + 3 \cdot (0.64)\, b$

3) $(0,5846 - 0,512 = 3, (0,64) \cdot b$

oder $0,0726$ ist $= 1,92 \cdot b$

4) Also $\frac{0,0726}{1,92}$ ist $= b$. oder in Decimalen.

5) $0,03781$ ist $= b$. Daher

6) $0,8 + 0,03781 = (0,8 + b)$

Damit hat man aber:

$0,83781 = (0,8 + b)$

$\ldots\ldots = \sqrt[3]{(0,5846)}$

Also der Werth der Cubik-Wurzel ist nun vorhanden. Sie ist $= 0,837 \ldots$

Erläuterung.

Zu Nr. 1. ist schon gegeben.

Zu Nr. 2). Der Schluß von der Wurzel auf den Cubus in der allgem. Darstellung ist leicht. Alsdenn folgt die Entwikelung zur linken Hand. Sie geschieht nach der obigen Formel:

$$(a+b)^3 \text{ ist } = a^3 + 3 . aab \underbrace{+ 3 . abb + b^3}_{\text{Diese 2 Glieder}}$$

läßt man aber weg. Warum? . . . wird auf folgenden Blättern erklärt werden.

Zu Nr. 3. Man zieht 0,512 auf beeden Seiten ab, und sezt hin, was übrig bleibt.

Zu Nr. 4. Man div. mit 192 zur rechten und linken zugleich. Damit erhält man den Werth von b allein.

Zu Nr. 5. Man drükt den Quotienten in Decimalen aus.

Zu Nr. 6. Man geht nun auf Nr. 1. zurük, und zieht 0,8 gleichsam herab. So ist man am Ziel! Dieses Ziel ist aber nur das erste, oder das für die erste Näherung; indem man jezt blos die 2 vordern Decimalen 0,83 sicher erhalten hat. Die dritte (7) steht schon etwas zu hoch. Die Unrichtigkeit kommt daher, daß man bei dem Verfahren Nr. 2. zwei Glieder in dem Cubus weggelassen hat. Diese Unrichtigkeit wieder gut zu machen, nimmt man das Geschäft von neuem vor, oder sezt es vielmehr fort, auf nachfolgende Weise:

1) $\sqrt[3]{(0,5846)}$ ist $= (0,83 + b)$

2) 0,5846 also $= (0,83 + b)^3$ Dafür
gilt $= (0,83)^3 + 3 \cdot (0,83)^2\, b \ldots$
oder $(0,571787) + 3 \cdot (0,6889) \cdot b$

3) 0,5846 — 0,571787)
oder $0,012813 = 2,0667\, b$

4) Also ist $\frac{0,012813}{2,0667} = b$

5) oder $0,006199 = b$. Daher

6) $0,83 + 0,006199 = (0,83 + b)$
oder $0,836199 \ldots$ ist $= \sqrt{}\,(0,5846)$

Erläuterung:

Zu Nr. 1.) Jetzt tritt 0,83 ein für 0,8, weil 0,83 genauer ist.

Zu Nr. 2.) Der Cubus wird geformt, wie auf voriger Seite. Von den 4 Gliedern des entwikelten Cubus nimmt man nur die 2 ersten in die Rechnung, und die übrigen läßt man weg.

Zu Nr. 3.) Man subtrahirt 0,571787 auf beeden Seiten.

Zu Nr. 4.) Man dividirt mit 2,0667.

Zu Nr. 5.) Man stellt den Werth von b in Decimalen auf.

Zu Nr. 6.) Man ordnet zusammen, so wie $(0,83 + b)$ jezt ausfällt.

Die Cubik-Wurzel ist hiemit bis auf 4 Decimalen gewiß richtig = 0,8361 ... die nachfolgenden (99) stehen zu hoch. Allein mit 4 Decimalen ist auch schon große Schärfe vorhanden, und man ist dadurch in den allermeisten Fällen gewiß zufrieden gestellt.

Durch das vorhergehende mühsame Verfahren (S. 57.) ist man nur bis auf drei Decimalen gelangt; 0,836... Hier aber bis auf vier. Allein man kann die Schärfe noch viel weiter treiben, wenn man die Operationen (durch Nr. 1... bis Nr. 6.) von neuem vornimmt, indem man jezt

$$\sqrt[3]{(0{,}5846)} = (0{,}8361 + b)$$

aufstellt, und von da aus, wie auf dem vorigen Blatt, den Calkul fortführt.

Es wird selten nöthig seyn, daß man das Geschäft wirklich so weit forttreibe. Aber, wenn es gefordert wird, so würde dieser 3te Actus vier neue Decimalen liefern, (*) so daß die Cubik-Wurzel bis auf 8 Decimalen genau vorhanden wäre. (Doch sind manchmal nur 7 davon ganz genau richtig.) Aber in der Anwendung wird man selten mehr als 3 odet 4 Decimalen nöthig haben, und z. B. in unserm Fall mit 0,836 meistens zufrieden seyn können.

Bei dieser hiemit angedeuteten Methode ist noch folgendes einer ganz vorzüglichen Aufmerksamkeit werth. Sie dienet auch den Fehler zu entdekken, welchen man bei der Annahme der ersten Näherungs-Zahl für die Cubik-Wurzel, etwa aus einer falschen

(*) Jeder neue Actus (mit 6 Operationen, wie die angegebenen sind) liefert die doppelte Anzahl der schon angenommenen Zahl-Zifern. Dieses ist ein allgemeines Gesez bei diesem Verfahren durchaus.

Vermuthung gemacht hätte, und berichtiget diesen begangenen Irrthum durch den Gang der Operationen von Nr. 1. bis Nr. 6 selbst.

Wie dieses zugehe, soll sogleich gezeigt werden. Man nehme den oben angeführten Fall, wo man $\sqrt[3]{157879} = 54{,}0474$ gefunden, und wenigstens die Wurzel bis auf 54,04.. genau, auf mühsame Art, berechnet hat. Man stelle sich vor, von der verlangten Cubik-Wurzel aus 157879 sähe jemand so viel ein, daß sie etwas höher als die ganze Zahl 54 liege. So viel dürfte wohl schon jeder Anfänger sogleich erkennen, wenn er nur in eine von 1 bis 60 gehende Cubik-Zahlen-Tabelle einen Blik wirft. Denn er sieht ja darinn:

54^3 ist $= 157464$ } Dazwischen liegt:
55^3 ist $= 166375$ } 157879.

und er folgert diesemnach recht sicher daraus:

$$54 \text{ ist} = \sqrt[3]{157464}$$

$$55 \text{ ist} = \sqrt[3]{166375}.$$

Nun dürfte er aber wohl der Vermuthung Raum geben: $54\frac{1}{10}$ möchte doch wohl $= \sqrt[3]{157879}$ seyn, oder doch nahe an diese Cubik-Wurzel hin treffen. Um sich hievon zu überzeugen, und auch selbst die Abweichung von der Wahrheit bei dieser Annahme zu erfahren, verfahre er, wie folgt: Er sezze nun die Gleichung wie S. 79. also:

1) $\sqrt[3]{157879} = (54\tfrac{1}{10} + b)$. Also
2) $157879 \quad = (54,1 + b)^3$. Dafür
$= (54,1)^3 + 3 \cdot (53,1)^2\, b \ldots\ldots$
$= 158340,421 + 3 \cdot (2926,81) \cdot b$. Daher
3) $(157879 - 158340,421) = 3 \cdot (2926,81) \cdot b$
oder $- 461,421$ (*) $= 8780,43 \cdot b$.
4) $-\dfrac{461,421}{8780,43} = b$. oder in Decimalen
5) $- 0,05255 \ldots$ ist $= b$. Deshalb muß
6) $(54,1, - 0,05255) = (54,1 + b)$ seyn,
oder $54,04744 \quad = \sqrt[3]{157879}$.

In der That ist die Cubik-Wurzel aus 157879 (wie bereits oben S. 83. angegeben worden) = 54,0474...

Und so erhellet, daß durch dieses Verfahren der Betrag der Cubik-Wurzel bis auf 4 Decimalen-Stellen (nach den ganzen 54) richtig gefunden, auch daß die irrige Vermuthung

„Diese Wurzel betrage $54\tfrac{1}{10}$ oder 54,1"

eben dadurch berichtigt (corrigirt) sey.

Dieser Erfolg hat etwas befremdliches! Durch einen einzigen Actus, der freilich aus 6 Operationen zusammengesetzt ist, (wie S. 61.) ist eine so bedeutende Correction hervorgebracht worden. Die Verwunderung darüber verschwindet aber, wenn man erwägt, daß durch diese Methode

---

(*) Hierüber wird in den nächsten Zeilen sogleich die Erläuterung nachfolgen.

aus 2 gegebenen oder angenommenen Zifern einer Wurzel-Größe allemal ihr Duplum, oder 4, also aus 3 gegebenen oder angenommenen Zifern das Duplum oder 6 Zifern am Ende gefunden werden.

Diese Verdoppelung der Zifern in der Wurzel, welche man sucht, ist ein

allgemein-gültiges Gesez,

dessen bereits oben S. 82. gedacht worden. Ausführliche Aufschlüsse über den Beweis davon muß man in Schriften der Algebra nachsuchen. Der Praktiker mag zufrieden seyn, daß er sich durch unzählige Beispiele aller Art von der Richtigkeit dieser Angabe überzeugen kann. Nur über

das Negative bei Nr. 3. in der Reihe der Operationen, wodurch — 461,421 hervorgegangen,

mus noch einiges beigefügt werden.

Jeder sieht, daß die Subtraction in Nr. 3. in diesem Beispiel nicht so von statten geht, wie solche doch oben S. 81. zweimal ganz wohl statt gefunden hat. Eben darum mus man die Zahlen umdrehen, und 157879 von 158340,421 abziehen. Diese Umkehrung der Operation ist der in S. 81. angegebenen, also entgegengesezt. Was aber dem positiven ententgegengesezt ist, wird mit dem Zeichen — angedeutet, und daher mus die Gleichung in Nr. 3. heißen:

$$-461{,}421 = 8780{,}43 \cdot b.$$

Wer nur etwas weniges von Buchstaben-Rechnung,

und vom Subtrahiren negativer Größen weis, wird sich in die Umwendung der Zeichen (von + in —) gewiß zu finden wissen. Wer gar nichts davon einsieht, dem ist mit 5 bis 6 Zeilen allein hierüber nicht wohl zu rathen (*) — —

Und diese Gleichung nun vorausgesezt, so dividire man mit 8780,43 auf beeden Seiten. Da der Dividend (—461,42) verneint ist, so mus auch der Quotient verneint ausfallen, so daß in Nr. 4. die Gleichung nun seyn muß:

$$-\left(\frac{461,421}{8780,43}\right) = b.$$

Und im Decimal-Ausdruk in Nr. 5.

$$-0,05255 = b$$

womit man sieht, daß b in diesem Fall keine bejahte Größe seyn könne, sondern eine verneinte. Daher wird es nothwendig, daß man

(54,1 + b) jezt im Untersezzen

= (54,1 — 0,05255) schreibe.

Daraus folgt auch, daß am Schluß der Rechnung (oben in Nr. 6. am Ende) nicht addirt, sondern sub-

---

(*) Manche finden sich noch eher in die Vorstellungen bei dieser Rechnung, wenn man Beispiele mit einfachen kleinen Zahlen giebt. Man sezze also, es sey vorhanden: 15 = 17 + 8.b. Daraus folgt:

$$15 - 17 = +8.b, \text{ oder } -2 \text{ ist } = 8.b.$$

Hieraus folgt $-\frac{2}{8} = b$ oder $-\frac{1}{4}$ ist gleich b. Also ist b eine negative Größe.

trahirt werden müsse. Die Subtraction bringt aber die Zahl 54,04744.. zum Vorschein, welche für die verlangte Cubik-Wurzel gültig ist (wenigstens bis auf die Zifern: 54,0474, wie schon oben gedacht worden.)

Noch ein Beispiel, von einer gewißen Ereigniß hergenommen: Ein Künstler hat behauptet: 7 Württemberg. Maas (Helleich) erforderten ein Holmaas, welches als Würfel gestaltet eben $5\frac{1}{2}$ Württemb. Cubik-Schuh halte, und beigefügt die Grund-Linien dieses Holmaases betrage etwas weniges über $1\frac{3}{4}$ Württemb. Schuh, d. h. etwas über 1,75 oder 1 Schuh $7\frac{1}{2}$ Zoll im Decimal-Maas in Länge.

Laßt uns seine Behauptung prüfen! Zuvörderst den lezten Theil davon; und also untersuchen, ob $\sqrt[3]{5,5}$ etwas über 1,75 liege. Dieser Ueberschuß über $1\frac{3}{4}$ kann ja wohl nahe an $1\frac{4}{5}$ oder 1,8 liegen. So werde dann angenommen: $\sqrt[3]{5,5}$ sey nur wenig mehr, als 1,8, Wie viel mag dieses mehr aber wohl betragen? Wir wollen so rechnen: Angenommen sey:

$$1)\ \sqrt[3]{5,5} = (1,8 + b)\text{. Also}$$
$$2)\ 5,5 = (1,8 + b)^3\text{. Dafür gelte}$$
$$= (1,8)^3 + 3\cdot(1,8)^2\, b \ldots$$
$$\text{oder} = 5,832 + 3\cdot(3,24)\, b$$
$$3)\ (5,5 - 5,832) = 3\cdot(3,24)\cdot b$$
$$\text{oder} - 0,332 \text{ ist} = 9,72\cdot b,$$

4) Daher $-\frac{0,332}{9,72} = b$. In Decimalen aber

5) $\quad -0,03214 = b$. Daher

6) $(1,8 - 0,03214) = (1,8 + b)$

oder $1,76785 \ldots = \sqrt[3]{5,5}$.

Und hienach wäre die Cubik-Wurzel von $5\frac{1}{2}$ oder 5,5 auf 1,767... Schuh anzunehmen, oder doch auf 1,76... weil die 3te Decimal-Zifer schon ungewiß in diesem Fall ist.

Diesem Resultat nach scheint der Künstler wohl recht zu haben, insoferne er die Länge des Holmaases, als die Länge der Grund-Linie eines Cubus angab, welche etwas über $1\frac{3}{4}$ Läng. Schuh oder etwas über 1,75 betrage. Unsere Zahl 1,76... liegt ja offenbar etwas weniges höher.

So viel hat uns nun ein einziger Actus, nach dieser Methode vorgenommen, belehrt. Aber genauer wird freilich die gesuchte Cubik-Wurzel von 5,5 gefunden werden, wenn wir die gefundenen Zifern 1,76 benüzzen, und in einem zweiten Act den Calkul durchzuführen die Geduld haben. Wir gehen nun von dem Saz aus:

$\sqrt[3]{5,5}$ ist $= (1,76 + b)$

und finden am Ende in der 6ten Operation, daß

$\sqrt[3]{5,5} = 1,76517 \ldots$

als die richtigere Cubik-Wurzel hervorgehe. Bei diesem 2ten Act kommt nichts negatives vor, (in Nr. 3.

nehmlich, wenn man den 2ten Actus ganz vornimmt von Nr. 1... bis Nr. 6.) weil in der Annahme (1,76 + b) die Zahl 1,76 jezt nicht zu hoch, sondern etwas noch zu niedrig steht, so daß der Zusaz + b nun wirklich bejaht (plus) ist, und also am Schluß keine Subtraction, sondern Addition eintreten mus.

Wenn man aber wollte, so könnte man auch in den zweiten Actus etwas negatives bringen, indem man den Näherungs-Saz annähme:

$$1)\ \sqrt[3]{5,5} \text{ sey } = (1,77 + b)$$

$$\text{Also } 5,5 = (1,77 + b)^3 \text{ u. s. f.}$$

Auch auf diesem Weg würde man die Cubik-Wurzel von 5,5 bis auf die fünfte Decimal-Zifer genau genug erhalten. Wer auf diese Weise den zweiten Act (mit den 6 Operationen) durchrechnet, wird auf 1,76518... hinaus kommen, wo blos über die allerlezte 5te Zifer noch ein Zweifel, (ob sie nicht... 7 heißen sollte) sich einstellen dürfte, welcher jedoch äusserst unerheblich seyn würde.

Damit soll gar nicht gesagt seyn, daß man blos auf diesem Weg die Cubik-Wurzel von $5\frac{1}{2}$ ausfindig machen könne, oder solle. Es ist nur zur Erläuterung dieser Methode das Beispiel gewählt; wie auch um darzulegen, daß sich dieselbe selbst in praktischen Vorfällen gar wohl anwenden lasse. (*)

(*) Was übrigens die erste Angabe des oben erwähnten

Die Schwürigkeiten, welche dieses hiemit genug erklärte Verfahren hat, sind nur bei den ersten 4 bis 6 Beispielen, welche man etwa durchrechnen mag, etwas bedeutend. Aber es wird gewiß jedem bei geringer Uebung leicht, das Geschäft zu Stande zu bringen; und die Vortheile sind überwiegend gros, wenn man sich einmal eine Fertigkeit erworben hat, die 6 Operationen durchzuarbeiten. Der Geübte wird wohl bald finden, daß er dieselben bis auf drei abkürzen kann. Aber der Anfänger mus an eine gewiße Ordnung sich einige Zeit binden.

Man kann mittelst dieser Methode die Schärfe in Auffindung der Quadrat- und Cubik-Wurzeln selbst

---

Künstlers bei diesem Fall beträgt, daß 7 Maas (Helleich) einen Würfel erfordern, welcher eben $5\frac{1}{2}$ Cubik-Schuh zum Innhalt habe, so weicht diese Behauptung allerdings sehr wenig von der ganz strengen Wahrheit ab. Nehmlich 125 Württemb. Cubik-Schuh ist der Innhalt von 1 Württemb. Eimer, oder von 160 Maas Helleich. Nun besteht die Proportion: $125:5{,}5 = 160:7{,}04$. Also gehören eigentlich zusammen 7,04 Maas und 5,5 Cubik-Schuh, als das Hol-Maas dazu. Aber 7,04 sind $= 7\frac{1}{25}$ Maas; und der Ueberschuß über 7 Maas kann also nicht einmal ein halbes Glas (sey es auch klein) betragen. In Praxi sieht man daher wohl, daß sich 7 Maas auf $5\frac{1}{2}$ Cubik-Schuh gar füglich dürfen rechnen und annehmen lassen.

viel weiter treiben, als dieses mit Logarithmen nur angeht. So vortrefflich auch Logarithmen sind, um schnell bis auf sechs Zifern eine Wurzel zu finden, so kann man doch die weitere Schärfe durch sie nicht, wie durch diese vorgeschlagene Mittel, erhalten. — Außerdem können sich Rechner desselben bedienen, wenn sie auch die Kunst, mit Logarithmeu zu rechnen, sich nicht eigen gemacht haben. — Und solcher Rechner giebt es bekanntlich sehr viele.

II. Geometrischer und Stereometrischer Theil.

XVIte Frage.

Wenn in einem hohlen Würfel, (Fig. I.) dessen untere Fläche AESI heiße, die obere aber GVTQ, ein Faden quer von unten hinauf durch den Mittelpunkt des Würfels gienge, von A bis T hinauf, wie berechnet man die Länge dieses Fadens? (Die Seite des Würfels AE oder ST sey bekannt angenommen.)

Antwort. Man denkt sich 1) eine Diagonale auf der untern Fläche AESI von A bis S gehend, (Fig. II.) oder die Linie AS. Da die Fläche ein vollkommenes Vierek ist, so ist, wenn dessen Seite AE = 1 Schuh oder 1 Zoll angenommen wird, die Linie $AS = \sqrt[2]{(AE^2 + ES^2)}$ das ist, gleich $\sqrt[2]{(1+1)}$ oder $= \sqrt[2]{2}$. (dem Lehrsaz des Pythagoras gemäs); und daher AS^2 ist = 2 Qu. Schuh oder 2 Qu. Zoll.

Man denkt sich 2tens) AS als Grund-Linie eines recht rechtwinklichten Dreieks AST. Die Hy-

potenuse in demselben ist eben der Quer-Faden AT. Desselben Länge mus, ganz eben demselben Lehrsaz gemäs, $= \sqrt{(AS^2 + ST^2)}$

oder $= \sqrt[2]{(2 + 1)} = \sqrt[2]{3}$

betragen.

Da die Quadr. W. von 3 in Näherung $= 1,73205$ ist, so ist hiemit klar, daß

die Länge des Fadens AT $= 1,7320 \ldots$

betrage, und also eine Linie ist,

welche zwischen $1 \frac{7}{10}$ und $1 \frac{3}{4}$ falle,

wenn die Grund-Linie des Würfels AE $= 1$ beträgt, weil 1,73 zwischen 1,70 und 1,75 fällt.

Wenn man AE $= 10$ Schuh lang annähme, so würde der Faden 17,320 . . . oder beinahe $17\frac{1}{3}$ Schuh lang seyn. (Nicht ganz $17\frac{1}{3}$, weil erst 17,333 dafür gelten würde.)

Käme der Länge der Grund-Linie jede andre Zahl zu, z. B. 9 Schuh, so würde

für die Länge von AT hiernach sogleich eingesezt: $(9 \cdot \sqrt[2]{3}) = (9 \cdot 1,7320)$

oder AT wäre $= 15,588 \ldots$ Schuh in Länge,

indem man allemal hiebei die geom. Proportion sich zu denken hat:

$$1 : \sqrt[2]{3} = 9 : 15,558 \ldots$$

Diese Länge einer Linie $= \sqrt[2]{3}$ findet man auch in der Planimetrie, als die Seite eines gleichseitigen in einen

Kreis eingeschriebenen Dreieks, wenn dessen Radius = 1 genommen wird. Siehe S. 45.

Damit erkennt man, daß man auf zwei Wegen zu dieser Längen-Bestimmung gelangen könne. Anfänger müssen hierauf achten!

XVIIte Frage.

Wenn diese Quer-Linie AT, oder der Faden, als die Grund-Linie zu einem neuen größern Würfel gedacht wird, wie gros wird der neue Cubus ausfallen? und wie wird er sich gegen den ersten verhalten?

Antwort. Die Zahl-Größe 1,73205.. welche $= \sqrt[2]{3}$ ist, kommt der Länge des Fadens zu. Diese Zahl mus cubirt werden, oder man mus ($\sqrt[2]{3}$) in die dritte Potenz erheben, weil man den Werth des Würfels verlangt. Da nun jeder Cubus als Zahl, aus 3 gleichen Factoren besteht, so sezze man solche so hin:

$$(AT) \cdot (AT) \cdot (AT) \text{ ist}$$

$$\text{hier } \underbrace{(\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3})} \cdot (\sqrt{3}) = AT^3$$

Diese 2 Factoren sind = 3.
Folglich (3) . ($\sqrt{3}$) oder (3) . (1,73205) ist = AT^3.
Die wirkliche Rechnung zeigt u[illegible]ie Zahl = 5,19615.
Und dieses ist der Cubik-Innh[illegible] des neuen Würfels.
Dieser ist also um etwas mehr, als 5mal so gros, als der erste, welcher 1 Cubik-Schuh gehalten hat, (nach S. 91.) nicht ganz $5\frac{2}{10}$ mal so gros.

XVIIIte Frage.

Welcher Innhalt kommt dann einem Würfel zu, dessen Grund-Linie nur halb so lang, als der Faden AT wäre? und auch ferner einem, dessen Grund-Linie $= \frac{3}{4}$ AT wäre?

Antwort. 1) Der Würfel, dessen Grund-Linie nur $= \frac{1}{8}$ AT wäre, kann zum Cubik-Innhalt nur $\frac{1}{8}$tel des C. Innhalts von AT^3 haben. Sein Innhalt mus daher $\frac{1}{8} . (3 . \sqrt[2]{3})$ oder $\frac{1}{8} . 5,19615..$ betragen; d. h. $= 0,64951..$ Er ist also mehr, als um $\frac{1}{3}$tel kleiner, als der mit der Grund-Linie $AT = 1$ errichtete Würfel, weil 0,649... niedriger, als 0,666 liegt, und er also nicht ganz $\frac{2}{3}$tel des C. Innhalts von AE^3 erreicht.

Die Behauptung selbst, daß bei Halbirung der Linie AT genau $\frac{1}{8}$tel für den Cubus ausfalle, sieht jeder ein, der bedenkt, daß allgemein die Würfel zweier Grund-Linien, sich wie die Cubik-Zahlen dieser Längen verhalten; und daß daher eben hier die Proportion als gültig aufzustellen sey.

$(AE)^3$ zu $(\frac{1}{2} . AE)^3 =$ (wie) $(AT)^3$ zu $(\frac{1}{2} AT)^3$

oder $1 : (\frac{1}{2})^3 = (\sqrt[2]{3})^3 : (\frac{1}{2}\sqrt[2]{3})^3$

Das zweite Glied ist $\frac{1}{8}$; und das vierte ist $= \frac{1}{8} (3 . \sqrt{3})$, nach vor. Seite; und die Ausrechnung giebt die Zahl 0,64951... an.

2) Auf die nemliche Weise beantwortet man die zweite Frage. Die Grund-Linie soll dabei $= \frac{3}{4}$ AT

seyn. Wäre sie $= \frac{3}{4}$AE, so wird deren Cubus $= (\frac{3}{4}AE)^3$; und bei der Annahme, AE sey = 1, nothwendig $= \frac{27}{64}$ seyn müssen. Es wird daher der Schluß recht wohl bestehen:

$$1 : \frac{27}{64} = (AT)^3 : (\frac{3}{4}.AT)^3$$

Das vierte Glied ist nun gleich $\frac{27}{64} . (3.\sqrt{3})$; und die Ausrechnung giebt: $\frac{27}{64}.(5,19615) = 2,19212...$ Mit Worten: Dieser Würfel wird beinahe $2\frac{2}{10}$ Cub. Zolle halten, wenn der auf AE errichtete als = 1 Cub. Zoll angenommen wäre, weil 2,19.. von 2,20 gar nicht weit entfernt liegt.

Auf gleichförmige Art lassen sich alle ähnlich Fragen beantworten.

XIXte Frage.

Wenn man in dem auf der Linie AT errichteten Würfel sich abermals einen solchen Quer-Faden denkt, und diesen selbst wieder zu der Grund-Linie eines neuen Würfels annähme, welcher ebenmäßig mit einem solchen Quer-Faden in seinem Innern versehen wäre, und so fortführe, sich immer größere Würfel und Quer-Fäden in denselben zu denken, auf welche Reihen von Größen kommt man dann wohl damit? und welches Gesez zeigt sich dabei?

Antwort: Man gelängt damit zu einer stetigen Reihe von Würfeln, (zu einer Progressio continua); und jeder nächstfolgende Würfel verhält sich gegen den vorhergehenden allemal wie 51,96.. gegen 10 beinahe. Dieses wird so eingesehen:

Wenn AE = 1. Zoll ist, und also der Quer-Faden AT = $\sqrt[2]{3}$ oder 1,732.. (Zoll) beträgt, eben diese Linie AT aber zur Grund-Linie eines neuen Würfels angenommen wird, so mus der Quer-Faden in diesem Würfel (die Hypotenuse in dessen Innerem) = 3 Zoll lang seyn. Man nenne diesen Quer-Faden, in Kürze ausgedrükt = F. Die folgende Proportion giebt uns den Werth desselben zuverläßig so:

AE zu AT = (wie) AT zu F.

$$1 : \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{3} : 3.$$

Nothwendig hat F gegen AT ganz eben das Verhältnis, welches AT gegen AE hat. Es ist ja dieselbe Neigung und Lage vorhanden; es sind immer dieselben Winkel bei T und bei A an dem ausgespannten Faden in jedem Würfel. Fährt man nun gleichmäsig fort, auch den Faden F wieder zur Grundlage eines neuen Würfels sich zu denken, in welchem ebenfalls ein Quer-Faden sich befände, und nennt man diesen = F^1, so wird seine Länge = $3.\sqrt[2]{3}$ betragen, weil man gewiß schluß-richtig sezzen darf:

AE : AT (wie) F zu F^1

$$1 : \sqrt[2]{3} = 3 : 3.\sqrt[2]{3}$$

Die Größe in dem vierten Glied ist = $\sqrt[2]{27}$, weil man sich jederzeit $3.\sqrt{3}$ als $\sqrt{(9.3)}$ vorzustellen befugt ist. In Decimalen ist der Werth = 5,19615...

(*) Der Winkel bei T ist = 54 Gr. 44″ 8″,5; der bei A aber 35″ 15′ 51″,5.

Man betrachte jezt die Folge der Glieder neben einander, und spreche sie aus:
AE zu AT, wie AT zu F; AT zu F, wie F zu F^{I}; und sofort F zu F^{I}, wie F^{I} zu F^{II} .... wo F^{II} einen Quer-Faden in einem neuen Würfel, dessen Grund-Linie F^{I} wäre, bedeutete. Damit ist offenbar eine geometrische Progression vorhanden, welche in Kürze so heissen wird:

$$AE : AT : F : F^{I} : F^{II}$$

$$1 : \sqrt[2]{3} : 3 : 3.\sqrt[2]{3} : 9.$$

Die Länge des Fadens F^{II} mus darum 9 (Zoll) betragen, weil sie ja dem Qu. von $(3.\sqrt[2]{3})$ divid. durch 3, gleich seyn mus, oder = (9.3) div. durch 3, d. h. = 9.

Dieser 4te Quer-Faden wird demnach 9mal so lang seyn, als die 1ste Grund-Linie AE, welche = 1 war.

Der Exponent für die Glieder dieser stetigen Reihe stellt sich durch das zweite Glied dar, als = $\sqrt[2]{3}$, oder als 1,7320508. Die Größe eines jeden Glieds mit diesem Exponenten multiplicirt, giebt dies nächstfolgende höhere Glied. So ist

$F . (1,732..) = F^{I}$ hier $= 3.\sqrt{3}$

$F^{I} (1,732..) = F^{II}$ hier $= 9$

und so fort und fort aufwärts.

Dagegen ist der Exponent für

jedes niederwärts gehende Glied $= \sqrt[2]{(\frac{1}{3})}$

oder in Decimalen = 0,577350...

Dieser Factor oder Multiplicator bewirkt eben so viel, als wenn man jedes frei gewählte Glied dieser Reihe mit 1,732.. dividirte. Diese Operation giebt allemal das nächstvorhergehende, kleinere Glied.

Damit ist das Gesez der Reihen-Glieder in Beziehung auf die Länge, d. h., auf die Grund-Linien für die Würfeln, von welchen wir sprechen, hinlänglich dargethan und erläutert.

Jezt gehen wir auf die Größen der Würfel selbst über. Man sehe den Anfang der Reihe an:

Cubus auf AE	:	auf AF	:	auf F	:	auf F^{I}
1	:	$3.\sqrt{3}$	:	27	:	$(27.\sqrt[2]{27})$
1	:	5,196..	:	27	:	140,296

Der Werth des Würfels, der auf der Grund-Linie AF errichtet gedacht wird, ist bereits S. 97. dargethan. Der des Würfels F^{3} mus wohl 27 seyn, insofern F = 3 ist.

Der des Würfels an der Grund-Linie F^{I} ist nothwendig $= (27.\sqrt[2]{27})$, da $(3.\sqrt{3})$ cubirt, ganz dieses Product giebt, gleich, als ob der Factor $\sqrt[2]{27}$ dreimal stünde.

Der Cubus für ein fünftes Glied, oder der Würfel auf der Linie F^{II} errichtet, fällt im Zahlenwerth sehr einfach aus, = 729, oder 9^{3}, weil die Länge der gedachten Linie selbst als = 9 erwiesen ist.

Jeder dieser Würfel ist demnach etwas mehr als $5\frac{1}{10}$ mal größer, als der nächstvorhergehende in der

Staatliche Bibliothek Passau

Reihe (beinahe $5\frac{2}{10}$ mal); oder er verhält sich wie 100 gegen 19,245... (beinahe wie 100:$19\frac{1}{4}$). Diese Verhältnis-Größe ist der allgemeine Exponent in dieser Reihe von Würfeln selbst, wenn man rükwärts geht. So verhält sich daher auch der Cubus des Quer-Fadens F^{II} zu dem des Quer-Fadens F^{I} oder

729 zu 140,296 = (wie) 100 zu 19,245.

Dagegen verhält sich der Cubus eben desselben Quer-Fadens F^{II} zu dem des Qu. Fadens F^{I}, wie 100 gegen $3\frac{7}{10}$ beinahe, indem man so rechnet:

729 zu 27 = (wie) 100 : 3,70370.

Das vierte Glied ist gleich $\frac{1}{27}$. (100). Also sehr wenig über $3\frac{7}{10}$.

Ferner verhält sich ebend. Cubus auf F^{II} gegen den auf AT, wie 100 gegen $\frac{7}{10} + \frac{1}{80}$ mit sehr kleinem Ueberschuß. Der Saz dabei ist:

729 zu $(3 . \sqrt[2]{3})$ = (wie) 100 : 0,712778.

Die 2 lezten Glieder kann man auch = 1000:7,12778 schreiben, wo die lezte Zahl sehr wenig über $7\frac{1}{8}$ hinaus geht.

Es erhellet aus diesen Säzzen, daß die angeführten Würfel, die auf den vier Fäden gedacht werden, eine geometrische Progression bilden, mit dem beständigen Exponenten

5,19615... aufwärts genommen;

und 0,19245... rükwärts genommen.

Nehmlich, als Factor, zu jedem höhern Glied

bringt 0,19245 durch die Multiplikation in dieses Glied das nächstniedrige in der Reihe hervor. Es ist eben so viel, als ob man mit 5,19615 in dieses höhere Glied dividirte. Zur Uebersicht stelle man die Werthe dieser Würfel so zusammen:

1	:	5,196	:	27	:	140,296	:	729.
0,1371	:	0,7127	:	3,703	:	19,245	:	100.

Hier ist die Verhältniß-Größe zwischen den Würfeln auf F'' und AE noch beigesezt; sie ist noch genauer berechnet, wie 100 gegen 0,137174.

Es wird räthlich seyn, daß man die Werthe der Längen von AE bis F' in gleiche Ansicht nehme:

1	:	1,732	:	3	:	5,196	:	9
$11\frac{1}{9}$	:	19,245	:	$33\frac{1}{3}$	:	57,735	:	100.

Man ersieht hieraus 1) daß es nicht eben nothwendig sey, daß das erste Glied mit 1 anfange, sondern daß jede andere Zahl dazu dienen könne; daß aber 2tens doch der Exponent nur in dem Fall durch das zweite unmittelbar angegeben werde, wenn das erste = 1 gesezt wird; daß man ihn aber, wenn das 1ste eine andere Zahl ist, dadurch erhalte, wenn man mit diesem ersten Glied in das 2te dividirt.

Hiebei mag noch folgendes bemerkt werden: Die Würfel der natürlichen Zahlen, nemlich

von	1	2	3	4
die Cubi:	1	8	27	64

bilden zwar auch eine Reihe, aber keine geometrische Reihe oder Progression, eben so wenig, als die angeführten natürlichen Zahlen selbst. Denn das 3te Glied ist

ja nicht (2.2), in der obern Reihe der Wurzeln; noch (8.8) in der untern.

Eine aufmerksame Betrachtung dieser Reihen führet zu mehreren wichtigen Folgerungen und Anwendungen, welche man anfangs nicht vermuthet.

XXste Frage.

Kommt dann der bekannten Reihe der Würfel, welche sich aus den natürlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4.. ergeben, nicht auch ein solcher gemeinschaftlicher Exponent zu, mittelst dessen man aus jedem gegebenen Glied die Größe des nächstfolgenden sogleich bestimmen könnte, wie dieses bei den angeführten Reihen statt findet?

Antwort. Die Reihe der natürlichen ganzen Zahlen ist keine stetige geom. Progression, und die Reihe der Würfel eben so wenig.

Die Reihe der natürlichen Zahlen ist nur eine arithmetische Progression, keine geometrische, als welche

1 2 4 8 16

heißen müßte, bei welcher der Exponent = 2 ist. Und die Reihe der Würfel, welche bekanntlich so fortgeht,

1 8 27 64 125

ist ebenfalls keine geometr. stetige Reihe, weil, wenn man eine solche annehmen wollte, das dritte Glied (nach 1.8) das Qu. von 8 seyn müßte, wie der Exponent 8 dieses erforderte; und das vierte Glied = (64.8) oder 512. In unserer angeführten Reihe

von Würfeln 1 : 8 : 27 : 64 ist durchaus kein solcher Exponent vorhanden, indem die Größe des 3ten Glieds (27) offenbar dieser Annahme widerspricht; und eben so auch die Größe des vierten, (64) gegen 27 genommen.

Dennoch aber lauffen diese Würfel, als geordnete Zahlen betrachtet, nach einem gewißen, fest bestehenden Gesez fort. Man kann die Größe eines jeden Würfels dieser Reihe finden, wenn man die 2 zunächst vorhergehenden Wurzeln und Würfel kennt, und sie benuzt, wie folgt:

f, g, h sind 3 natürliche Zahlen, z. B. 3, 4, 5. Man will den Würfel h^3 wissen. Da ist die Regel:

„Nimm $3\,f.f + 9.f + 7$, und addire dazu g^3. Die „Summe giebt den Cubus von h.“ Man erkennt

$$3\cdot(3\cdot3) + 9\cdot3 + 7 = 54 + 7 \text{ od. } 61.$$

Dazu den Cubus von 4 oder 64 gethan, giebt 125, den verlangten Würfel. Auf diese Art kann man jederzeit einen Cubus von h finden. Die angeführte Formel gründet sich auf die beobachteten Unterschiede von 3 Würfeln und die Entwikkelung der cubirten Größe $(m+1)^3$. Dieses Gesez aber führt auf keinen Exponenten, noch paßt es zu einer geometrischen stetigen Reihe.

Uebrigens leuchtet soviel wohl jedem ein, daß, wenn man diese Reihe von Würfeln mit der stetigen (S. 101.) vergleicht, nehmlich

1	8	27	64	125
1	5,196	27	140,296	

sich mit den Gliedern der einen leisten lasse, was sich mit denen der andern nicht leisten läßt. Wer nach einem Würfel fragt, welcher $5\frac{1}{10}$ oder $5\frac{2}{10}$ mal so gros, als ein anderer seyn soll, wird mittelst der stetigen Reihe die Frage in großer Näherung und zur Genüge sich beantworten, auch den verlangten Würfel sogleich zeichnen können, weil er durch die Reihe der Wurzeln $1; \sqrt[2]{3}; 3$ oder durch 1; 1,732; 3 hier in dem ausgesprochenen zweiten Glied die Länge der Grundlinie für diesen Würfel bestimmt kennt, und sie genau zeichnen kann. (Man sehe auf S. 45. und S. 93. zurük.) Die Zahlen der obern Reihe dienen zu diesem genannten Zwek nicht, da zwischen 1 und 8 kein Würfel liegt. Eben so wird der, welcher einen Würfel, welcher $140\frac{1}{4}$ mal größer, als ein anderer vorgegebener seyn sollte, durch einen Blik auf das vierte Glied der stetigen Reihe (140,29..) leicht befriediget werden, wogegen die obere Reihe, auch wenn man sie fortsezt: 64; 125; 216... auf keine Zahl, welche nahe an 140 läge, hinleitet.

XXIste Frage.

Die Glieder in beeden angeführten Reihen führen doch immer nur auf gewiße bestimmte Zahlen, welche weit von einander abstehen. Kann man sich derselben Reihen aber auch dann bedienen, wenn man

Würfel von andern freigewählten Größen, z. B. einen, welcher 6mal oder 9mal so gros, als ein anderer vorgegebener wäre, zu erhalten wünscht?

Antw. Mittelst der zweiten, der stetigen Reihe läßt sich dieses ziemlich leicht auf folgendem Weg bewerkstelligen, insoferne man mit Angaben der Näherung sich befriedigen mag.

Es ist oben, S. 101. dargethan worden, daß die geometrische Reihe nicht nothwendig mit $1 : \sqrt[2]{3}$ bei den Wurzeln anfangen müsse, oder mit 1 : 5,196 bei den correspondirenden Würfeln. Wir dürfen also annehmen, es gebe schon solche berechnete stetige Reihen, deren Glieder so anfiengen; für die Wurzeln $0{,}1;\ [(0{,}1) \cdot \sqrt[2]{3}];\ (0{,}1) \cdot 3$

für die Würfel $0{,}001;\ [0{,}001 \cdot \sqrt[2]{27}];\ 0{,}001 \cdot 27$

Der Exponent ist dabei eben derselbe, wie der S. 98. für die Wurzeln = 1,732.. und für die Würfel = 5,196. Die drei Glieder der Würfel werden in Decimalen heißen: 0,001; 0,005196; 0,027.

Gleichförmig denke man sich zwei solche zusammengeordnete Reihen, welche mit 0,2; und dem Cubus dieses Bruchs mit 0,008. anfiengen, und für die folgenden Glieder die fest bestehenden Exponenten diesen wie vorher 1,732.. und 1,5916.. Die vier ersten Glieder dieser Reihen werden seyn:

0,2	0,34641	0,6	1,0389
0,008	0,41569	2,16	11,223

So nehme man ferner Reihen an, welche mit 0,3. und 0,027. beginnen; und fahre so fort bis 0,9 als Wurzel, und bis 0,729 als Cubus.

Diese Reihen sind bald berechnet, wenn man die Multipla der immer vorkommenden Exponenten 1,73205.. und 1,591615 von 1 bis 9 vor sich liegen hat und benützt, nehmlich

1) 1,73205	1) 1,591615
2) 3,46410	2) 3,183230
3) 5,19615	3) 4,774845 u. s. f.

Ist dieses geschehen, und man hat damit ein solches Blatt mit berechneten Reihen in diesem Umfang vor sich liegen, so kann man sich damit eine Menge von Fragen beantworten, welche Würfel von bestimmter Größe, wie man solche eben in Concreto nöthig hat, betreffen. Man bedenke, daß den vier Zahl-Größen der angeführten Wurzeln: 0,2: 0,34641; 0,6 u. s. f. bestimmte Linien entsprechen oder zugehören, d. h. Fäden in Würfeln, wie wir solche bisher angenommen haben. Bei 0,6 ist der Faden = F; bei 1,0389 ist der Faden F' zu denken, wenn AE = 0,2 gilt, welches bei der allerersten Annahme immer = 1 gegolten hat.

Wer nun einen Würfel in Zeichnung zu erhalten wünschte, welche 11 $\frac{2}{9}$ mal größer wäre, als ein anderer, oder wo das Verhältniß + 11,222 gegen 1 statt fände, der hätte eine Linie = 1,0389 auf einem Maasstab abzunehmen; der Quer-Faden F' wäre als diese Linie anzusehen; dem Würfel aber auf dem

Faden selbst käme der Cubik-Inhalt = 11,223 gewiß zu. (Siehe nur das vierte Glied der Würfel an). Damit hätte er die Aufgabe befriedigend gelöst; insofern AE = 1 (in Länge) eine gegebene bestimmte Zahl wäre. Denn ist AE genau 1 Schuh lang, so ist 1,0389 nothwendig 1 Schuh $3\frac{89}{100}$ Lin. die rechte Länge für die Grund-Linie zu dem verlangten Würfel von $11\frac{2}{9}$ Cub. Schuhen.

Für einen Würfel, welcher 9mal so gros, als ein anderer seyn soll, (nach welchem S. 105. gefragt worden,) werden sich auf dem angenommen berechneten Reihen-Blatt ebenfalls einige Zahlen finden, welche dem Verhältniß 9 zu 1, unter den Würfeln, sich nähern. Z. B. wenn die Reihe der Wurzeln mit 0,4 beginnet, so wird man finden:

Wurz.	0,4	0,69282;	1,2;	2,0784
Cubi	0,064;	0,33255;	1,728;	8,9789

Hier liegt der lezte Würfel sehr nahe an 9. (Denn 8 Cub. Schuh und 978 Cub. Zoll sind von 8,999 oder 9 doch immer nicht sehr ferne.) Der dazu gehörige Faden ist $F^1 = 2,0784$. Die Linie dazu läßt sich genau construiren, wenn man von AE = 0,4 hier ausgeht, so wie der Faden = $(3 \sqrt[2]{3})$ sich bestimmt hat sezzen lassen, wenn man von AE = 1 ausgegangen ist, (nach S. 97.) Und damit wird man befriedigt seyn.

Um diese Ueberzeugung zu vollenden, lasse man seine Betrachtungen noch folgenden Gang nehmen:

Man weiß aus den längst scharf berechneten Cub. Wurzeln der natürlichen Zahlen, daß $\sqrt[3]{9} = 2{,}08008$ sey. (Siehe auch oben S. 48.) Unsere vierte Zahl der Reihe $F^1 = 2{,}078$.. liegt augenscheinlich nahe an dieser Zahl: 2,080... und wenn man diese Größen in Zeichnungen überträgt, so wird die Abweichung der kleinen Theilchen für die Grund-Linie des Würfels, welchen man hier zeichnen will, kaum bemerklich werden.

Mit dieser berechneten Wurzel- und Würfel-Tabelle, deren erste Glieder alle ächte Brüche wären, verbinde man eine andere, deren erste Glieder unächte seyn sollen, und zwar solche, deren Werthe nur sehr wenig über 1 giengen, z. B. 1,01; 1,02;... bis 1,09 . für die Wurzeln, oder für die diesen correspondirende Linien. Man denke z. B. sich als

Wurzel	1,05	;	1,8186	
als Cubi:	11,576	;	6,0207	

Hier zeigt sich schon im zweiten Glied der Würfel eine Zahl, welche sehr wenig über 6 hinausgeht. Wenn man daher auf einen 6mal größern Würfel ausgeht, (wornach S. 105. ebenfalls gefragt worden) so läßt sich hier sogleich eine Anwendung in Näherung machen. Die der Wurzel correspondirende Linie ist hier = 1,8186.. Deren Länge dienet gar wohl zu der Grund-Linie des Würfels, welche wir zur Zeichnung eben in diesem Fall nöthig haben.

Sie ist bei den vorgehenden Annahmen ein Faden, wie die Linie AT, insoferne nehmlich AE nun = 1,05

gälte. Nach der strengen Rechnung ist die Cubik-Wurzel aus der Zahl 6 = 1,8171. (Siehe oben S. 48.) Unsere Zahl aus der Reihe für die Wurzeln ist 1,8186... Die Zeichuung müßte gar sehr gros seyn, wenn die Abweichung in der Grund-Linie noch für das Auge bemerklich ausfallen könnte.

Mittelst dieser Methode läßt sich nun auch die vor 2000 Jahren schon berühmte Aufgabe, einen jeden Würfel zu verdoppeln, auflösen, insofern man sich auch hiebei mit einer Näherung begnügen mag. Man nehme eine Reihe an, deren erstes Glied $\frac{8}{11}$ wäre, das zweite $(\frac{8}{11} \cdot \sqrt{3})$, und so fort, für die Wurzeln, oder für die Linien, wie bisher. Die Würfel dieser Linien seyen $= (\frac{8}{11})^3$; $(\frac{8}{11} \cdot \sqrt[2]{3})^3$ u. s. f. Die Werthe in Decimalen werden so stehen (da $\frac{8}{11} = 0,727272..$ ist)

für die Wurzeln: 0,7272.. ; 1,25967

für die Würfel: 0,48427.. ; 1,9988

Das zweite Glied der Reihe für die Würfel ist, wie in die Augen fällt, von 2,000 oder von 2 gar sehr wenig abweichend. (Man darf ja dabei denken, es sey vorhanden 1 Cub. Schuh und 999 Cub. Zoll.) Die Wurzel, welche oben drüber steht, kann daher von der strenger berechneten Cubik-Wurzel aus 2 nur äusserst wenig abweichen. Auch ist dem also, weil wohl bekannt ist, daß $\sqrt[3]{2} = 1,25992..$ der bewährten Rechnung gemäs ist. (Siehe auch S. 48.)

Nun läßt sich eine Linie $= \frac{8}{11}$ ganz genau zeich-

nen, insofern AE = 1 in Länge bestimmt und bekannt ist; also auch eine Linie = 1,25967 .. nach dem Gesez des Fortgangs, mittelst des Exponenten $\sqrt[2]{3}$. Die Grund-Linie zu dem zu verdoppelnden Würfel ist deshalb ohne Zweifel eben damit in gar nicht unbedeutender Schärfe vorhanden.

XXIIte Frage.

Wenn nun gleich hieraus erhellet, daß man durch Anwendung dieses Verfahrens immer auf eine Länge oder auf einen Quer-Faden kommen könne, welcher von der Grund-Linie des Würfels, welchen man eben sucht, nur sehr wenig abweicht, so bleibt dabei dennoch immer etwas gleichsam zurück, was den Rechner und Zeichner nicht ganz befriedigt. Kann man dann nicht ganz und gar auf die rechte Stelle selbst hinkommen, wo die Länge der gedachten Grund-Linie genau vorhanden seyn mus? und läßt sich denn diese nicht näher bestimmen, als es auf dem bemerkten Weg thunlich ist?

Antwort. Man mag es versuchen, mehrere Beruhigung hierüber dem Neugierigen auf nachfolgende Weise zu verschaffen.

Die Grundfläche des Würfels AEIS sey, mit AE = 1, beibehalten. Dessen Höhe AE werde aber senkrecht verlängert gedacht, und das obere Vierek des Würfels GQTV rükke in der erhöhten Linie AG oder ST hinauf. Es wird dadurch ein vierekigtes

Prisma entstehen, wie die Fig. IV. einen solchen Körper darstellt. Die Diagonale AS $= \sqrt[2]{2}$ auf der Grundfläche bleibt, wie vorher. Wenn man aber auch in diesem Körper einen Faden von A nach T hinauf gezogen annimmt, so wird sich dessen Länge ändern, so wie sich die Höhe ST ändert. Dieser Faden AT wird also von $\sqrt[2]{3}$ an, oder von 1,73205.. an, zunehmen, so wie der Körper aufhört, ein vollkommener Cubus zu seyn. Die Länge dieses Fadens, oder dieser Hypotenuse wird gewiß damit bald = 1,80 werden; und ferner = 1,81... und 1,82 u. s. f. Da die Zunahme der Höhe ST stetig (in continuo) gedacht werden darf, so wird auch die Hypotenuse im steten Wachsthum sich verlängern. Man wird also ganz gewiß in dem Weg von 1,81 bis 1,82 zu einer Größe = 1,817 gelangen; auch zu einer = 1,8171 und daher auch zu 1,8171206, das ist, zu dem Werth der Cubik-Wurzel von 6, als welcher eben diese Decimalen zukommeu. (Siehe oben S. 48.)

Daß man also an die Stelle selbst, wo $\sqrt[3]{6}$ statt hat, gewiß hinkomme, während man in stetigem Zug, ohne Sprung, hinauf rükt, daran ist nicht zu zweifeln. Allein damit ist doch nicht das geleistet, was man sonst bei Irrational-Größen durch vollkommene geometrische Construction leistet; wie bei Linien, welche als $= \sqrt[2]{2}$ oder $\sqrt[2]{3}$ vollkommen sich darstellen lassen. Auch der Kathetus der Höhe in dem

rechtwinklichten Dreiek ATS würde in dem angenom- menen Fall als:

$$ST = \sqrt[2]{(AT^2 - AS^2)}$$
$$= \sqrt[2]{(\sqrt[3]{6} . \sqrt[3]{6} - 2)}$$

in Zahlen, als $\sqrt[2]{(3,301927 - 2)}$, oder $\sqrt[2]{1,301927}$, d. h. = 1,14101 ausfallen. Diese Höhen-Linie läßt sich so genau, als man die Decimalen nur erstrekken mag, zeichnen. Allein auch hiebei tritt keine geometrische Construction ein; und diese Höhen-Linie ist nur in Näherung darzustellen —, obgleich in so großer, daß für das Auge des Zeichners und des Prüfers, auch wenn er die feinsten Maasstäbe anwendete, nichts zu erinnern übrig bleibt.

Ganz eben die Bewandtnis, wie mit $\sqrt[3]{6}$, hat es mit andern Cubik-Wurzeln, und deren Darstellung durch Linien. Die Cubik-Würzeln aus 8, aus 27... und aus Brüchen, welche aus solchen Zahlen zu- sammengesezt sind, (*) lassen sich aber allerdings in Linien aus gar leicht einzusehenden Gründen jederzeit ganz geometrisch behandeln.

Wenn man, anstatt den Würfel zu erhöhen, den- selben gleichsam erniedriget annimmt, (in dem man die Fläche GQTV an der Höhen-Linie AG oder ST

(*) Auch aus mehreren Irrational-Zalen, worüber wei- ter unten nähere Aufschlüsse folgen, und Erläuterun- gen beigebracht werden sollen.

stetig herab sinken läßt, so wird hiedurch ein Körper wie Fig. V. oder VI. entstehen. Dessen Hypotenusen, oder Quer-Fäden, (AT), werden nun alle kürzer, als $\sqrt[2]{3}$ seyn bei AE = 1; und sie können abnehmen, bis auf $\sqrt[2]{2}$, weil der Diagonale AS unten auf der Fläche des Viereks eben diese Größe zukommt, und die Hypotenuse in dem Dreiek ATS doch immer noch etwas länger seyn mus, als diese Linie AS, welche die Basis des Dreieks ist. Bei diesem stetigen Herabrükken wird man nothwendig auf Stellen kommen, in welchen der Faden, welcher beim Cubus = 1,73205 gewesen, die Länge = 1,71 erhält, auch 1,709; und daher auch diese = 1,70997 . . . welche der Cubik-Wurzel aus der Zahl 5 gleich kommt (nach S. 48). Eben so wird man auf einen Faden von der Länge = 1,58740 . . . gelangen, welche dem Werth von $\sqrt[3]{4}$ entspricht; und so ferner auf 1,442249 = $\sqrt[3]{3}$. Allein, in Beziehung auf geometrisch zu construirende Linien hat es eben dieselbe Beschaffenheit, wie bei den Hypotenusen des höhern Prisma, welche über 1,73205 . . hinauf steigen.

Nur durch Hülfe der höhern Geometrie, wenn man gewisse Curven, wie die Parabeln, die Ellipse, die Hyperbel und andere krumme Linien von noch höherer Ordnung unter sich oder mit dem Kreis verbindet, kann man durch Ordinaten und Abscissen

eben die angeführten Cubik-Wurzel-Größen linearisch darstellen. Allein die Ausführung hierüber läßt sich hier nicht mittheilen. Die Vorkenntnisse, welche dazu gehören, sind in besondern Werken aufzusuchen.

XXIIIste Frage.

Sollte man aber einem Geometer, welcher die Lehre von Irrational-Größen, so weit solche oben vorgekommen, und deren Anwendung auf rein-construirte Linien, wie in mehreren Säzzen gezeigt worden, gefaßt hat, doch nicht eine nähere Ueberzeugung davon beibringen können, warum man bei den meisten Cubik-Wurzeln, und bei den zu solchen gehörigen Linien mit Constructionen des Zirkels, und mit Linien von Dreiekken, welche darinn eingeschrieben werden, allein nicht ausreiche? und woher es komme, daß man mit der Elementar-Geometrie hiebei nicht zu der gewünschten Befriedigung gelange?

Antwort. Die Bekanntschaft mit folgenden geometrischen Säzzen, (welche man selten in Büchern nur berührt findet) scheint am kürzesten den verlangten Aufschluß geben zu können.

I.) Man denke sich ein rechtwinklichtes Dreiek wie AED in Fig. VII., und zeichne auf den Kathetus AD einen Halb-Kreis, welcher die Hypotenuse AE schneide. Von dem Punkt des Durchschnitts B werde ein Loth, BG, auf den Diam. gefällt. Damit zeigt sich ein Stück desselben, AG. Dieses mit AE^2 multiplicirt, werde als ein vierekigtes Prisma angesehen:

($AE^2 . AG$). Es wird allemal niedriger, als ein Würfel seyn, weil AG immer kleiner als AE ist. Der Beweis soll sogleich geführt werden, daß dieser Körper jedesmal so gros, als ein Cubus, auf dem Diam. errichtet sey; oder daß ($AE^2 . AG$) = AD^3 als eine richtige Gleichung bestehe.

II.) Eben diese Construction führt zu einer wesentlich mit der angeführten zusammenhängenden Gleichung ($AG^2 . AE$) = AB^3. Dabei ist nothwendig ein vierekichtes Prisma, das höher, als ein Cubus ist, vorhanden. Auch diese Gleichung soll erwiesen werden.

Vorkenntnis, zum Beweis des

Isten Sazzes. Die Dreiekke ADE und ADB sind ähnlich, nach bekannten Säzzen der Elementar-Geometrie; und ihre Innhalte sind ($\frac{1}{2}AD . DE$) und ($\frac{1}{2}AD . BG$). Diese verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Hypotenusen; von da laufe man folgende leichte 6 Säzze durch:

1) $(\frac{1}{2}AD . DE) : (\frac{1}{2}AD . BG) = AE^2 : AD^2$

2) Also $DE : BG$ ebenso,

und daher allein für sich $BG = \left(\frac{AD^2}{AE^2} . DE\right)$

3) $DE : AD = BG : AG$.

4) $DE : AD = \left(\frac{AD^2}{AE^2} DE\right) : AG$

oder $1 : AD = \left(\frac{AD^2}{AE^2}\right) : AG$,

5) Hieraus folgt $\frac{AD^3}{AE^2} = AG.$

6) Schluß AD^3 ist $= (AE^2 . AG.)$

Damit ist der behauptete Iste Saz erwiesen.

Der IIte wird so dargethan: der Figur gemäs ist:

1) $AD : AG = AE : AB.$

2) Man cubire alle Glieder; und sezze also:

$$AD^3 : AG^3 = AE^3 : AB^3$$

3) $(AE^2 . AG) : AG^3 = AE^3 : AB^3$

Den Werth des ersten Glieds erkennt man aus der so eben erwiesenen Gleichung. Es folgt hieraus:

4) $. \ 1 : AG^2 = AE : AB^3$

5) Schluß: Die Gleichung $AB^3 = (AG^2 . AE)$ ist erwiesen.

Man füge diesen zwei Haupt-Säzzen einen

IIIten bei: „Das Verhältniß der zwei Würfel AD^3 und AB^3 ist durch die zwei einfachen Linien $AG:AE$ gegeben. Nehmlich erwiesen ist schon

$$AG^2 . AE : AE^2 . AG = AB^3 : AD^3$$

Also auch $AG : AE$ ist $= AB^3 : AD^3$

Und daher $\frac{AG}{AE} = \frac{AB^3}{AD^3}$

Auch folgt daraus $\sqrt[3]{\frac{AG}{AE}} = \frac{AB}{AD}$

IV.) Ein vierter Saz, welcher hierher gehört, und zum Zwek führt, geht so hervor: Die Figur selbst nöthiget dazu, daß man anerkenne, es sey

$$AD : AG = AE : AB$$

und daher ist zuverläßig (AE . AG) = (AD . AB). Also das Product der 2 Größen ist gegeben, insoferne AE und AG als bekannte Linien angenommen sind. Das Verhältnis der 2 Würfel von AD und AB ist ebenfalls durch AE und AG gegeben, weil die Gleichung

$$\frac{AG}{AE} = \frac{AB^3}{AD^3} \text{ in dem Saz III.}$$

erwiesen ist. Stünden die zwei lezten Größen blos im Quadrat, nicht im Cubus, so würden die einzelnen einfachen Größen oder Linien AB und AD sich durch den Quotienten $\frac{AG}{AE}$ und durch das Product (AE . AG) als durch bekannte Größen ganz und gar finden lassen; algebraisch, durch Buchstaben-Rechnung, und geometrisch, durch strenge Construction, zugleich. Man mus dabei nur an den ausgemacht-richtigen Saz denken: „daß, wenn das Product zweyer Grös„sen gegeben ist, und ihr Quotient, (oder auch das „Quadrat des Quotienten,) die einzelnen Größen „selbst damit als gegeben angesehen werden dürfen.“ Nun ist in unserem Fall zwar das Product zuverläßsig ganz gegeben (AG . AE) = (AD . AB); aber der Quotient oder das Verhältnis heißt:

nicht $\frac{AG}{AE} = \frac{AB}{AD}$, noch $= \frac{AB^2}{AD^2}$; sond. $\frac{AB^3}{AD^3}$

Eben deshalb aber kann man auch AB und AD nicht einzeln aus diesen Datis geometrisch bestimmen.

Um dieses wohl einzusehen, erwäge man, wie die

einzelnen Größen, sie sollen x und y heißen, hervorgehen, wenn ihr Product $P = x . y$, und ihr Verhältnis oder ihr Quotient $E = \frac{x}{y}$ zuerst nur gegeben wären.

Man verfährt so: Aus $P = x . y$ folgert man $\frac{P}{x} = y$; aus $E = \frac{x}{y}$ aber $\frac{x}{E} = y$. Also sind unter sich gleich $\frac{P}{x} = \frac{x}{E}$. Und daraus ergiebt sich $P . E = xx$. Daher alsdenn $x = \sqrt[2]{(P . E)}$. Mit dem einen Factor x, ist auch der andere y gefunden; weil ja das Product (x . y) gegeben ist $= P$.

Geometrisch genommen, hat man die Linie = x allemal, wenn man ihr Quadrat, xx, als gegeben anerkennen mus, weil mit jedem Vierek dessen Grund-Linie auch gegeben ist.

Auch durch anderswoher bekannte geometrische Constructionen kann man diesen Saz bewähren. Z. B. durch eine Zeichnung, wie solche in Fig. VIII. vorgelegt wird. Da sehe man die Linien AP und PD, als von noch unbekannter Länge an. Aber ihr Product sey bekannt $= MP^2$; und ihr Verhältnis (AP : PD).

Nun kann man (behaupte ich) die Größe von PD einzeln finden; und es ist schon hinlänglich, wenn man nur PD kennt, (weil, wenn einer der 2

Factoren, welche ein Product ausmachen, bekannt ist, der andere immer als gegeben angesehen wird).

Den Beweis nun zu führen, mus man freilich etliche Vorkenntnisse aus der Elementar-Geometrie mitbringen.

1) Daß $MP^2 = (AP.PD)$ sey. 2tens, daß die Dreiekke AMP und MPD ähnlich seyen; und daher AP zu PD, wie $AM^2 : MD^2$ sich verhalten. Es ist nicht nothwendig, daß man AM und MD selbst gemessen habe. Wenn man nur in dem Dreiekchen Mmd das Verhältnis der 2 Seiten Mm und Md kennt und einsieht, daß $\frac{Md}{Mm} = \frac{MD}{AM}$ und also auch die Quadrate dieser Quotienten gleich seyen.

Diese Vorkenntnis kann man allerdings mitbringen, ohne etwas von den Säzzen $P = x.y$ und $E = \frac{x}{y}$ und den Folgerungen daraus zu wissen.

Jezt der Beweis selbst: Man sehe MP^2 und $\frac{Md^2}{Mm^2}$ als zwei Factoren an. Beede sind gegeben. Also auch ihr Product. Es ist $\left(MP^2 . \frac{Md^2}{Mm^2}\right)$ oder $\left(MP^2 . \frac{MD^2}{AM^2}\right)$ und dieses heiße in Kürze $= V^2$. Also

$$AM^2 : MD^2 = MP^2 : V^2$$

ist eine ganz gegebene Proportion. Mit ihr eben so gewiß

$$AM : MD = MP : V.$$

Was ist dieses V aber? Es ist ganz = PD. Denn der Figur gemäs und nach Voraussezzung der Vorkenntnis Nr. 2. mus durchaus der Saz statt haben:

$$AM : MD = MP : PD$$

und damit ist PD als **bekannt** anzuerkennen. Mit PD ist aber auch AP bekannt.

Jezt gehe man auf unsere erwiesene Gleichungen zurük:

$$(AG.AE) = (AB.AD) \text{ und } \frac{AG}{AE} = \frac{AB^3}{AD^3}$$

Diesen gemäs ist gegeben

$$P = xy \text{ ; und } E = \frac{x^3}{y^3}$$

Nun sehe man, ob und wie man x oder y einzeln aus diesen Datis finden könne.

1) Aus der ersten Gleichung folgt $\frac{P}{x} = y$; aus der zweiten $\frac{x^3}{E} = y^3$; und daher $\frac{x}{\sqrt[3]{E}} = y$.

2) Also ist $\frac{P}{x} = \frac{x}{\sqrt[3]{E}}$; und man kann daraus nur so viel folgern, daß $P.\sqrt[3]{E} = xx$ sey. Durch **Rechnung** findet man freilich hieraus x, aber, wie will man $P.\sqrt[3]{E}$ **geometrisch** construiren? oder

$\sqrt[2]{}(P.\sqrt[3]{}E)$, als den Werth von x selbst? Was will man mit Cubik-W. von E, oder mit $\sqrt[3]{}\left(\frac{AG}{AE}\right)$ geometrisch genommen, anfangen?

Man sieht hiemit, daß das Verfahren nicht zu dem gewünschten Ziel führe.

V.) Folgende rein-geometrische Ansicht bewährt vollends die hiedurch herbeigeführte Ueberzeugungen. Die erwiesene Gleichung $(AE^2 . AG) = AD^3$ bezieht sich auf das rechtwinklichte Dreiek AED. Nur die Hypotenuse desselben AE, und ein Stük des Kathetus AD, nehmlich das Stük AG, ist gegeben. Der ganze Kathetus AD soll erst gesucht werden. Was kann man nun mit den Linien AE und AG vornehmen? Sie reichen nicht zu, um eine Folgerung daraus abzuleiten, welche die Größe von AD zu bestimmen dienlich wäre. Denn der Winkel, welcher zwischen AE und AG liegt, ist nicht gegeben. Auch die Chorde AB nicht, sondern blos deren Cubus $= (AG^2 . AE)$, (nach S. 116.) und damit blos $\sqrt[3]{}(AG^2 . AE)$ in Rechnung $=$ AB; aber nicht geometrisch, als Linie zur Construction. (*) Damit hat

(*) Wenn man AB als Linie, geometrisch bestimmt, schon kennte, so wäre allerdings der Schluß auf AD ganz bündig und fertig. Man spräche alsdenn nur AB : AE $=$ AG : AD.

man also nicht, was zur Ausführung förderlich wäre, um eine Linie = AD darzustellen, weil AE und AG allein nicht zureichen.

VI.) Schluß-Betrachtung. Wenn der Diameter AD gegeben ist, so kann man unzählige vierekkigte Prismata, wie (AE^2 . AG) nach unserer Figur eines ist, construiren. Man kann den Punkt G nach Willkühr hinauf- und herunterrükken, also AG verkürzen und verlängern, mus aber eben dabei immer AE länger und kürzer nehmen. Allemal kann man damit eine Zeichnung hervorbringen, welcher die Gleichung $AD^3 = (AE^2 . AG)$ entspricht. Ist zugleich mit AD die Linie AG gegeben, so ist, weil man jederzeit auf AD einen Halbkreis errichten, und auf G ein Loth bis B ziehen kann, die Linie AE bestimmt, weil sie durch den Durchschnitts-Punkt B gehen mus; und nur unter der Bedingung ein Dreiek, wie AED, welches hieher paßt, gedacht werden mag. Wäre aber mit AD zuerst die Hypotenuse AE gegeben, und AG noch nicht, so erhält man die Länge für AG durch Rechnung, und in der Figur vermittelst des Durchschnitts, welchen AE mit dem Halb-Kreis in B macht. Ein Loth von da bestimmt die Linie AG. Daß $AG = \frac{AD^3}{AE^2}$ jederzeit (*) seyn müsse, ist aus den vorigen Blättern wohl bekannt.

(*) Eine geometrische Deduction über diesen Saz findet man schon in mein. Belehrung in Geometrie im Abschn. VIII. S. 71. und S. 75.

Nach allem dem ist die Aufgabe gar keinen Schwierigkeiten unterworfen: Für einen gegebenen Diameter AD unzählige viereckichte Prismata zu formiren, jedes wie ($AE^2 . AG$), jedes niedriger als ein Cubus, und jedes dem Innhalt nach dem Cubus AD^3 gleich, und alle lassen sich einzeln unbestimmt zeichnen, so bald man die 2 Linien AD und AE, oder AD und AG kennt.

Aber der umgekehrten Aufgabe, aus den 2 Linien des Prisma AE und AG, (welches also in Zeichnung ganz gegeben wäre,) die Grund-Linie des Würfels, der dem Prisma, dem Innhalt nach, gleich seyn soll, also die Linie AD selbst, zu zeichnen, läßt sich auf diesem Wege kein Genüge leisten, wie nun wohl genugsam dargethan ist.

Eben die Beschaffenheit hat es mit der Chorde AB, und mit denselben zwei Linien AE und AG, bei welchen jederzeit ein Prisma, das höher als ein Würfel ist, statt hat: ($AG^2 . AE$) $=$ AB^3. Ungeachtet aber der nun wohl sattsam erwiesenen Unzulänglichkeit der zwei Haupt-Gleichungen zu den zwei Würfeln (auf AD und AB), insoferne man die Factoren AE AG zu der geom. Construction der gedachten Wurzeln anwenden wollte, führen dennoch einige nähere Betrachtungen über die Verbindung der in Fig. VII. vorkommenden vier Linien AD, AG, AE, AB, zu einem

mechanischen Verfahren, die Grund-Linien der Würfel, welche den genannten viereckichten

Prismen (dem Innhalt nach) *gleich* sind, zu finden,

worüber eine kurze Ausführung gar wohl noch ihre Stelle hier finden darf.

Man benehme sich, wie folgt: 1) AE und AG seyen gegebene Linien, und das vierekkichte Prisma ($AE^2 . AG$) sey mit ihnen gegeben und gezeichnet.

Die Linie AG werde als ein Loth auf eine willkührliche Linie gesezt. Dazu nehme man drei andere Linien, jede kürzer, als die zweite gegebene AE an. Diese 3 Linien sollen als drei Hypotenusen zu AG gehörig, angesehen werden, so daß sich damit drei rechtwinklichte Dreiekke bilden, wie AGB; $AG\overset{1}{B}$; und $AG\overset{11}{B}$, in Fig. IX.

2) Man verlängere diese drei Hypotenusen, jede um ein solches Stük, daß die Verlängerung immer eine Linie = AE gebe. Man wird die drei Bezeichnungen $(AB + BE) = (A\overset{1}{B} + \overset{1}{B}\overset{1}{E}) = (A\overset{11}{B} + \overset{11}{B}\overset{11}{E})$ jede = AE wohl verstehen. Es geht recht wohl an, daß man damit ein Stük eines Kreisbogens zeichne, (wie die Fig. IX. ihn andeutet) weil sich die drei Linien, als 3 Halbmesser ansehen lassen.

3) Hierauf lasse man von den 3 Endpunkten dieser Linien, von $\overset{11}{E}$, $\overset{1}{E}$, E Lothe fallen auf die Verlängerung der senkrechten AG. Die Punkte auf dieser Verlängerung, wo die Lothe eintreffen, sollen

D'', D', D heißen. Damit stellen sich drei Dreiekke dar; $AD''E''$; $AD'E'$; ADE.

4) Auf den drei Linien AD'', AD', AD ziehe man Halbkreise, auf die Seite gegen AE zugewendet; und merke sich die Punkte, in welchen die Hypotenusen AE'', AE', AE, durch diese Halbkreise geschnitten werden.

5) Fällt einer dieser Durchschnitte auf eines der drei B, (nehmlich auf B'' oder B' oder B); so ist der rechte Punkt schon getroffen, welchen man haben mus. Wenn z. B. wie in unserer Figur, B' dieser Punkt wäre, so beachtet man nun blos die zwei Dreiekke AGB' und $AD'E'$, als die, deren Seiten AB' und AD' ganz für den vorgefaßten Zwek passen, und dem Verlangen ein Genüge leisten, den rechten Diameter zu finden. Dieser ist hier $= AD'$; und man darf versichert seyn, daß jezt die Gleichung eintrete:

$$(AD')^2 = (AE')^2 \cdot AG$$

wie auch $(AB')^3 = (AG)^2 \cdot AE'$.

Denn die Figur stellt sich nun ganz so dar, wie die

Fig. VII.; und alles gilt jezt, was bei derselben (S. 116.) deducirt worden ist.

Sollte aber etwa keiner der drei Halbkreise beim Schneiden der Hypotenusen einen der Punkte $\overset{II}{B}$, $\overset{I}{B}$, B, treffen, so mus man ein viertes Dreiek, welches $AG\overset{III}{B}$ heissen mag, zeichnen, und dazu noch ein Dreiek $A\overset{III}{D}\overset{III}{E}$, um einen geschikten Durchschnitts-Punkt zu erhalten. Die Ungewißheit, wie dieses 4te Dreiek wohl so zu zeichnen seyn möchte, daß der Forderung Genüge geschehe, wird nur sehr geringe noch seyn. Denn jeder schon vorhandene Durchschnitt in einem Halbkreis ist gleichsam der Wegweiser für die nächstfolgende Zeichnung; und nach einer kleinen Uebung gewöhnt sich das Auge, den rechten Punkt B bald zu finden.

Diese indirecte Methode, die Grund-Linie des Würfels, welcher den Innhalt eines vorgegebenen vierekkichten Prisma haben soll, zu finden, befriediget allerdings nicht ganz vollständig. Als mechanisches Verfahren betrachtet, ist sie aber dennoch zur Anwendung dienlich, und das Benehmen dabei läßt sich leicht in Uebersicht nehmen.

XXIVste Frage.

Da die Versuche, eine geometrische Construction zustand zu bringen, welche der Gleichung $AD^3 = AE^2 . AG$ entspräche, und die Grund-Linie für den

Würfel, welcher einem gegebenen vierekkichten Prisma gleich seyn soll, geometrisch zu bestimmen, hauptsächlich darum fruchtlos ausgefallen zu seyn scheinen, weil man nur zwei Linien, wie AE und AG sind, zur geometrischen Behandlung und Benuzzung in dem vorgelegten Fall erhält; sollte man wohl nicht glücklicher seyn, auf eine solche Linie AD durch Constructionen hinauszukommen, wenn man drei Linien von den drei Dimensionen eines Parallelepipedums entlehnte, und dieselbe geschikt in Dreiekken, welche in einen Kreis eingeschrieben würden, verbände, um dadurch eine vierte Linie hervorzubringen, welche die Grund-Linie des Cubus darstellte?

Antwort. Was sich bei einer solchen Annahme von drei Linien hervorbringen läßt, scheint immer auf nachstehende oder ihnen ähnliche Erfolge hinaus zu lauffen:

Man denke sich eine Figur, wie die uns schon bekannte Fig. VII.; ziehe aber eine Parallele mit DE oben von A, senkrecht auf den Diameter. Sie heiße AF; und ihre Länge sey dadurch bestimmt, daß man von dem untern Endpunkt des Diameters D eine durch den Punkt B gehende Quer-Linie ziehe, welche also den Halbkreis, und zugleich die Hypotenuse AE in diesem Punkt B schneide. Man sieht in Fig. VII.* daß durch dieses Verfahren zwei ähnliche Dreiekke entstehen, ADE und AFD. (Jedes derselben ist augenscheinlich dem Dreiek ADB ähnlich, und daher sind sie unter sich ähnlich.)

Nun erwäge man, daß ganz aus gleichen Gründen, aus welchen die Gleichung erwiesen ist, $(AE^2 . AG) = AD^3$ (nach S. 116.) auch die Gleichung gültig seyn müsse $(DF^2 . DG) = AD^3$. Wer etwa in dem ersten Augenblick daran noch zweifeln möchte, der drehe die ganze Fig. VII.* in Gedanken oder wirklich nur um, und sehe AF als Basis an, werfe aber darauf den Blick auf DG; so wird die Ueberzeugung nicht ausbleiben können, daß dem Würfel auf AD das erwähnte zweite Aequivalent zukomme. Die nächste Folgerung nun ist, daß bei der nothwendigen Annahme

$$(DF^2 . DG) = (AE^2 . AG)$$

die Proportion auch statt finden müsse:

$$DF^2 : AE^2 = AG : DG.$$

Wenn man aber ferner die Seiten des Dreieks ADB mit denen der gedachten ähnlichen Dreiekke ADE und AFD in gewiße Verbindungen bringt, so gelangt man auf eine andere, Anfangs weniger einleuchtende, Folgerung, welche den Saz enthält, daß ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, das durch die 3 Linien DF, AE, BG gebildet wird, ebenfalls dem Würfel auf AD dem Innhalt nach gleich sey, oder daß, kurz gesezt,

$$(DF . AE . BG) = AD^3 \text{ sey.}$$

Den Beweis dieser Behauptung kann man in sechs Säzzen so führen:

Aus den oben stehenden Verhältnissen darf man zuverläßig die Proportionen aufstellen:

1) $DF : AE = \sqrt[2]{AG} : \sqrt[2]{DG}$

2) $DF^2 : (DF \,.\, AE) = \sqrt[2]{AG} : \sqrt[2]{DG}$

wenn man nemlich in die zwei ersten Glieder mit DF multiplicirt. Eben so viel ist

3) $\frac{AD^3}{DG} : (DF \,.\, AE) = \sqrt[2]{AG} : \sqrt[2]{DG}$; weil der Werth von DF^2 ganz so aus $(DF^2 \,.\, DG) = AD^3$ gewiß folgt. Also ist auch

4) $AD^3 : (DF \,.\, AE \,.\, DG) = \sqrt[2]{AG} : \sqrt{DG}$.

5) Die Gleichung ist nun klar

$$AD^3 = (DF \,.\, AE \,.\, DG) \,.\, \sqrt[2]{\left(\frac{AG}{DG}\right)}$$

$$\text{oder} = DF \,.\, AE \,.\, (\sqrt[2]{DG}) \,.\, (\sqrt[2]{AG})$$

Endlich 6) $AD^3 = DF \,.\, AE \,.\, BG$.

Denn, daß $DG \,.\, AG = BG^2$, und daher

$\sqrt[2]{(DG \,.\, AG)} = BG$ sey, mus jeder anerkennen, der nur etwas von den Eigenschaften des Kreises kennt.

Hiemit ist nun die aufgestellte Gleichung für den Würfel AD^3 erwiesen.

Sie ist immer wichtig, und sollte in Büchern, welche von diesem Gegenstand handeln, nicht übergangen werden. Aber man denke nur nicht, daß man damit jedes vorkommende Parallelepipedum, von willkührlich angenommener Höhe, Breite und Tiefe, der geom. Construction zu der bisher abgehandelten Cubatur

unmittelbar unterwerfen könne. Wenn man die Fig. VII.* mit Aufmerksamkeit ansieht, so erkennt man bald, daß die Größen der zwei Linien DF und BG, (welche in dieser Gleichung vorkommen und 2 Dimensionen unsers Körpers selbst correspondiren) ganz von der Länge der Linie AG abhängen. Denn, wenn AG kürzer wäre, so müßte GB länger und DF kürzer seyn; wäre aber AG länger, so wird auch DF länger, aber GB kürzer.

2) Man stelle nur die Gleichungen, welche wir beede kennen, genau zusammen:

$$(AE . DF . BG) = (AE^2 . AG). \text{ jede} = AD^3$$

Daß daraus $DF . BG = AE . AG$

folge, ist einleuchtend. Also kommt der Linie BG der Werth $= \frac{AE . AG}{DF}$ zu. Sezzet man ihn in das Product der drei Factoren ein, so wird aus

$(AE.DF.BG)$ nichts anders, als $(AE.DF.\left(\frac{AE.AG}{DF}\right)$

welches eben $= (AE^2 . AG)$ selbst ist, hervorgehen. Damit sind wir auf die S. 116. schon erwiesene Gleichung des Würfels AD^3 zurükgekommeu. Die Beschränkung der Größe BG auf den gedachten Werth, und zugleich des Produkts $(DF . BG)$ auf den Werth $= (AE . AG)$ ist daher einleuchtend. Mit AE und AG aber läßt sich die Linie AD nicht geometrisch construiren, wie oben genug erwiesen worden (obgleich durch Rechnung finden, als $AD = \sqrt[3]{(AE^2 . AG)}$.

welches aber nicht zu dem hier vorgesezten Zwek gehört.)

Die Betrachtungen hierüber, mit noch einigen andern, welche sich bei einigem Nachdenken den bisherigen leicht anschließen, (*) führen bald darauf, daß man auch mit Annahme dreier Linien, wie DF, AE, BG sind, nicht ausreiche, um AD durch geometr. Construction zu bestimmen.

Es dürfte immer für viele lehrreich seyn, noch ein besonderes Beispiel in Zahlen nachzurechnen. Der vorhergegegangene Vortrag wird daher wohl durch das nachfolgende seine gute Erläuteruug erhalten.

Die Linie AE sey = 15 Zoll lang angenommen, nnd AG = $5\frac{9}{10}$ oder 5,9. Zoll. Da wird der Würfel auf AD = $1327\frac{1}{2}$ Cubik-Zolle betragen, insofern man der Gleichung gemäs rechnet: $(AE^2 . AG) = AD^3$.

Die Cub. Wurzel aus 1327,5 ist = 10,990. So lange wäre daher der Diameter AD in diesem Fall. Also, nahe an 11 Zoll. Soll diese Linie AD ganz genau = 11 seyn, so muß AE größer, als nur 5,9 gesezt werden, nemlich 5,915555. Denn diese Zahl erhält man, wenn

(*) Es ist kein Raum in diesen Blättern, diese Betrachtungen umständlicher auszuführen. Auch sind dabei tief eingehende Bedenklichkeiten zu berüksichtigen, welche eine eigene Abhandlung erfordern.

man $\frac{AD^3}{AE^2}$ = AG berechnet, als = $(11)^3$ div. durch $(15)^2$, oder 1331 div. durch 225. Der Quotient $5\frac{206}{1331}$ ist = 5,195555.. Durch Rechnung ist also die Linie genau bestimmt, und nun kann man die Zeichnung, da man AD und AE in ganzen Zahlen hat, (in 11 und 15) sehr leicht ausführen. Die nächsten Schlüsse geben uns die Linien DE = 10,198039; BG = 5,48424; und DF = 16,1795.. Man findet diese Zahlen so: DE ist = $\sqrt[2]{(AE^2 - AD^2)}$ oder $\sqrt[2]{(225 - 121)} = \sqrt[2]{104}$, ganz der Figur gemäs. Und die Qu. W. aus 104 ist = 10,198039. Alsdenn erhält man aus den Dreiekken der Figur nothwendig folgende Proportion AD : DE = AG : BG. Die Zahlen der 3 ersten Glieder sind schon gegeben; und daraus erhält man BG = 5,48424. Endlich kommt DF aus AD : DE = AE : DF, und ist = 16,1796.

Soll nun ein Parallelepipedum angenommen werden, in welchem AE = 15 als Linie wie vorher immer bleiben soll, so müssen die gedachten Werthe und keine andere für BG und DF eintreten, wenn AD^3 = 1331 hervorgehen soll. Auch ist (16,1796). (15). (5,48424) = 1331 der Cubus von 11. Wer nachrechnet, wird die Ueberzeugung davon erhalten.

Die Linien DF und BG sind also auf die bestimmt angegebenen Zahlen beschränkt. Wer andere (immer so, daß AE = 15 bliebe, und auch die Grund-Linie für den Cubus, AD = 11 bestünde) wählen wollte,

z. B. BG kleiner, als 5,484 und dagegen DF länger, der würde damit in der Figur den Durchschnitts-Punkt im Kreis B verlassen, weil seine Linie BG nun tiefer stehen müßte; die Linien AF und DF würden aber eben damit länger werden, als sie in unserer Figur zu sehen sind. Hiemit käme er auf einen ganz andern Fall hinaus, als der bei der bestimmten Länge von AG vorausgesezt war.

Es sey nur noch die Bemerkung beigefügt, daß die Größen der Linien AE und AG gar wohl auch irrational seyn können; z. B. AE $= \sqrt[2]{200}$; und AG $= \sqrt[2]{21}$. Es würde also $AD^3 = (AE^2 . AG)$ als $= (200 \sqrt[2]{21})$ anzunehmen seyn; und daraus folgte die Linie für $AD = \sqrt[3]{(200 . \sqrt[2]{21})}$. Hiemit correspondirte diese Linie der Cubik-Wurzel eines zum Theil aus Irrational-Größen bestehenden Products. Es wird hierdurch erläutert, was oben S. 112. in der Note in Kürze angedeutet worden ist.

XXVte Frage.

Welchen Vorschriften ist dann nun aber auch die Berechnung solcher Körper unterworfen, deren Grund-Flächen nicht rechtwinklicht sind, wie die bisher betrachteten, sondern welchen an der Ekke stumpfe und

spizze Winkel zukommen? und solcher, welche mehr als nur vier Ekken haben?

Antwort. Wenn die Grund-Fläche eines Körpers eine geschobene Figur, eine Raute, (Rhombus) oder doch rautenförmig ist, (rhomboidalisch) und eben so die dieser entgegengesezte, ihr parallele obere Fläche, so ist die Vorarbeit, die vor der cubischen Berechnung noch vorhergeht, daß man eine solche ebene Fläche, (die obere oder die untere) in ein Vierek oder in ein Rechtek verwandele; welches durch Multiplikation der gemessenen Grund-Linie, mit ihrer senkrecht genommenen Höhe, nach gemeinen Regeln, bewerkstelliget wird. Wenn aber der Körper mehr, als nur 4 Ekken auf der Bodenfläche hat, und eben so auf der obern, so ist das Fünfek, das Sechsek, .. das Vielek, nach den Vorschriften der Elementar-Geometrie, in Dreiekke zu zerlegen; und, wenn deren Flächen einzeln berechnet worden sind, so wird ihre Summe als die Fläche eines Rechteks angesehen, und der Quadrat-Innhalt desselben mit der senkrechten Höhe des Körpers multiplicirt. (*)

Das Verfahren bei dieser Berechnung ist im allgemeinen genommen, so einfach, daß sich dem,

(*) Dem Körper, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, kommt die beschwerliche Benennung zu: Parallelepipedum. Manche haben dafür das Wort gebraucht: „Der langgestrekte Vierek-Körper." Es ist aber nicht recht zur Uebung gekommen.

der nur einen kleinen Theil der vorhergehenden Vorträge gefaßt hat, und die Gesezze des Calkuls der Quadraturen kennt, kaum etwas Neues hierüber noch sagen läßt.

Man belegt die Richtungen nach Länge, Breite und Tiefe in dem Körper mit den Benennungen der drei Dimensionen und dadurch, daß man diese in Zahlen nach gesezlichem oder selbstgewähltem Maaße ausdrückt, und mit diesen Zahlen, als mit Factoren, ein Product bildet, wird die Cubatur zu Stand gebracht. Der Weg zur Cubatur geht aber, wenn man recht die Ordnung des Benehmens dabei verfolgt, von dem Vielek, (der oberen oder der unteren Fläche,) zu dem länglichten Rechtek, dessen Fläche der Summe der das Vielek constituirenden Dreiekke gleich ist; und von diesem Rechtek zum vollkommenen Vierek. Dieses denkt man sich als die Basis eines vierekkichten Prisma, von senkrechter Höhe. Diese Höhe, (auch oft die Länge des Körpers genannt) ist der 3te Factor, mit welchen die Cubatur in Rechnung vollbracht und vollendet wird.

Dieses an sich einfache Geschäft wird blos dadurch beschwerlich, daß in den allermeisten Fällen die Zahl-Größen, welche etlichen der 3 Dimensionen, oder auch wohl allen zukommen, Brüche enthalten, ächte oder unächte, und daß deren Multiplikation Aufmerksamkeit in der mechanischen Behandlung und oft viele Zeit erfordert.

Diese wird sehr abgekürzt, und die Anstrengung bei der Multiplikations-Arbeit wird sehr erleichtert, wenn man die Methode der Logarithmen anwendet. Mittelst derselben wird nur addirt, (*) wo die cubische Rechnung die Multiplikation von Factoren sonst allemal nothwendig macht.

Es ist ein Unglück für jeden, welcher viele cubische Rechnungen zu führen hat, wenn er das Vorurtheil nicht ablegt, mit welchem sich so viele Praktiker tragen, 1) als ob eine ausserordentliche Anstren-

---

(*) Aus Nachsicht für viele Rechner hat man es vermieden, in diesem Buch Logarithmen anzuwenden, damit manche nicht bei vielen Säzzen abgeschrekt werden, welche sie gewöhnlich ganz zur Seite zu legen pflegen, so bald ihnen eine Ausführung mit Logarithmen dabei in das Auge fällt. — Hier aber stehe doch, nur der Vergleichung wegen, ein Product von 3 Factoren mit Logarithmen berechnet, welches S. 132. vorgekommen ist. Es ist dort erwiesen, daß (16,1796).(15).(5,4820(= 1331 sey. Mit Logarithmen rechnet man hiebei so:

Log. 16,1796	ist =	1,2089674
Log. 15	=	1,1760913
Log. 5,48424	ist =	0,7391196
Log. (1331)	ist =	3,1241783

Hier sind zu den Absolut-Zahlen die 3 Logarithmen aus den Log. Tafeln (Vega's) genommen, und addirt worden. Ihre Summe bringt den Logar. hervor, 3,1241783, welchen man in den Tafeln aufsucht. In diesen befindet sich zunächst neben ihm die Absolut-Zahl 1331; und mit ihr hat man das verlangte Product.

gung dazu gehöre, die Behandlung der Logarithmen, (das Aufschlagen, das Unterscheiden ihrer sogenannten Kenn-Zifern, die Näherungen beim Nicht-Zutreffen in aller Strenge) zu verstehen; 2) als ob, wie bei allem Tabellen-Rechnen, Unsicherheit dabei vorwalte, 3) als ob dadurch selbst ein Hang zur Bequemlichkeit und einer Art von Trägheit erzeugt würde, welche den Mathematiker von Anstrengung entwöhnen.

Zuverläßig gehört nicht so viel Kunst dazu, die Logarithmen gehörig behandeln zu lernen, als dazu gehört, mit Brüchen, deren Nenner 3 oder 4 Zifern haben, zu rechnen, oder diese in Decimalen zu verwandeln, und mit diesen zu multipliciren. 2tens, was das Tabellen-Rechnen anbelangt, so bedenke man, daß der, welcher beim Multipliciren, die Multipla vorgegebener Factoren benüzt, wie die von 144, von 1728, u. a. m. was man doch jedem Rechner erlaubt, und immer selbst anräth, (s. auch oben S. 35. u. 41.) auf ganz ähnliche Weise verfährt, und ganz gleiche Vorarbeiten früherer Rechner benüzt; und daß der Cubik-Rechner solche Ein-mal-Einse in der That gar nicht entbehren kann. Endlich 3tens, daß auch der Logarithmen-Rechner Aufmerksamkeit und Vorsicht auf vielfache Weise immer noch anwenden mus, so daß die Besorgung, er möchte über seine Methode ein träger Rechner werden, sehr ungegründet genannt zu werden verdient.

Nächst dem beweist die Erfahrung, daß das beschwerliche Geschäft, Quadrat- und Cubik-Wurzeln direct auszuziehen nach einiger Zeit die Verstands-Kräfte der Rechner wirklich abstumpfe. Der große Zeit-Verlust dabei ist ohnedem gar nicht zu mißkennen. (*) Eben dieses Zeit-Aufwandes wegen umgehen auch so viele Praktiker die Behandlung und Anwendung der Irrational-Größen, so oft sie nur können; und erlauben sich dafür Näherungen, welche unzählige unrichtige Resultate zur Folge haben.

Das Geschäft des Cubik-Rechners wird übrigens nicht vermehrt, wenn ihm ein schiefstehender Pa-

---

(*) Es wird nicht undienlich seyn, auch hierüber ein Beispiel hier einzusezzen. Es werde gefordert, daß man aus der Zahl $5846\frac{7}{10}$ die Cub. Wurzel berechnet angeben soll. Die Benuzzung der Logarithmen ist hier folgende: Man nimmt aus den Log. Tafeln zu der Absolut-Zahl 5846,7 den Log. = 3,7669108

Divid. ihn mit 3 = 1,2556369

und sucht die Absol. Zahl hiezu . . . 18,0151. So ist die Arbeit beendiget, binnen einer Zeit, welche keine Minute beträgt. Man vergleiche damit die Zeit, welche der gewöhnliche directe Wurzel-Auszug erfordert. Vorkenntnisse mus man allerdings einige zu diesem Geschäft mitbringen. Z. B. daß für die ganze Zahl 58467 der Logar. 4,7669108 heiße welchem bei 5846,7 die Kenn-Ziffer 3 (anstatt 4) zukomme.

rallelepipedum, anstatt eines senkrechten vorkommt. Ein Loth von der oberen Ebene des Körpers auf die parallele Grundfläche, oder auf deren erweiterte Erstrekkung, herabgelassen, bestimmt die senkrechte Höhe, welche man zur Rechnung, als einen Factor, nöthig hat. Die Grundfläche des Körpers, wird, wie sie ist, genommen, und berechnet. Deren Quadrat-Maas ist der zweite Factor, und damit erhält man das Product als den Cubik-Innhalt, auf ganz gewohnte Weise.

XXVIste Frage.

Lassen sich dann auch Körper, welche oben anders geformt sind, als unten (bei denen also die untere Fläche der oberen End-Fläche nicht gleich ist) und welche z. B. auf Spizzen ausgehen, auf vierekkichte Prismen reduciren, und so cubiren?

Antwort. Wenn die Körper oben spizzig sind, zur unteren Fläche aber ein Dreiek, Vierek oder Vielek haben, so nennt man sie Pyramiden; dreiekkichte, vierekkichte u. s. w. (reguläre.)

Die dreiekkichte Pyramide ist allemal der 6te Theil eines gleich-hohen vierekkichten Prisma, dessen Bodenfläche doppelt so gros als die der Pyramide ist; oder sie ist (was auf ein und dasselbe hinausläuft) der 3te Theil eines gleich-hohen dreiekkichten Prisma. In unserer Fig. X. sehe man das vierekkichte Prisma an, und die Pyramide sogleich darneben. Die Bo-

denfläche des ersten ist eine Raute ABCD, die der Pyramide ist deren Helfte, ABC. Die Höhen beeder Körper sind gleich, jede AD. Der Beweis der Behauptung, daß diese Pyramide der 6te Theil des Viereck-Prisma oder der 3te des dreieckichten Prisma sey, (dessen Grundfläche ACBh ist,) wird dadurch beschwerlich, weil man in planimetrischer Zeichnung die drei Pyramiden, welche in dem lezteren Prisma liegen, und gleichsam verstekt enthalten sind, nur theilweise, und mit verschobenen Seiten vorzeigen kann. Die Zeichnung nimmt sich z. B. so aus, wie in Fig. XI. angedeutet ist. Es giebt aber auch noch etwas andere Darstellungen, welche die geführten 2 Schnitte, mittelst welcher man die Pyramide aus dem Prisma hervorbringt, gleichsam mit ihren Grenzen andeuten. Aber das Auge wird meistens bei der Ansicht der sich durchkreuzenden Linien irre. Viel besser kommt man der deutlichen Vorstellung durch körperliche Modelle, aus starkem Papier oder Pappe geformt, zu Hülfe. So bald man mittelst eines solchen Modells einsieht, wie der erste Schnitt von dem Punkt D nach CB herabgeführt, die erste Pyramide hervorbringe, so ergiebt sich die Einsicht, wie die 2 andern erzeugt werden, leicht. Legt man eine solche Modell-Pyramide vor sich hin, und bezeichnet ihre End-Punkte mit bestimmten Buchstaben, so ist der Beweis alsdenn sehr bald geführt, daß dieser Körper der 3te Theil des dreieckichten Prisma sey, aus welchem er geschnitten worden ist.

Die Dreiekke CBF und BFE sind gleich (der Fig. XI. gemäs.) Damit erhält man 2 gleiche Pyramiden: CBFA = BFCA. Ferner sind FDE und BFE zwei gleiche Dreiekke; und mit dieses erhält man 2 gleiche Pyramiden CBAF = DEAF. Hiemit kommt CBAF in 2 Gleichungen vor. Also sind die 3 Pyramiden gleich: CBFA = BFEA = DEFA. Diese machen aber das ganze Prisma aus. Je Pyramide ist daher ⅓tel desselben.

Die vierekkichte Pyramide ist ebenfalls der 3te Theil des vierekkichten Prisma, wenn ihre Höhe mit der des Prisma übereinkommt, und ihre Grundfläche der des Prisma gleich ist. Der Beweis dieses Sazzes ruht darauf, weil durch einen Schnitt, der von der Spizze bis zur Diagon. der Grundfläche geführt wird, die vierekkichte Pyramide in 2 gleiche Dreiek-Pyramiden getheilt wird, zugleich aber auch das Vierek-Prisma in 2 Dreiek-Prismen. Damit aber ist alles auf den zuerst beleuchteten Fall zurük geführt.

Bei mehr-ekkichten Pyramiden treten die nehmlichen Schlüsse ein.

Die abgekürzten Pyramiden, zu welchen wir jezt übergehen, beschäftigen den Rechner mehr, als die vorherbetrachteten ganzen. Jede abgekürzte Pyramide läßt sich als die Differenz von zwei ähnlichen ganzen ansehen, von einer größern, DACB (in Fig. XII.) und von einer kleinern Dabc. Die

kleinere ist gar nicht vorhanden, sondern sie wird nur auf der oberen Fläche, acb, als ergänzendes Stük gedacht. Mittelst dieser erdichteten Annahme kann man allerdings sprechen:

DACB — Dacb ist der wirklich vorhandenen abgekürzten Pyramide gleich. Weil die Dreiekke ACB und acb ähnlich sind, in so ferne ein durch acb mit der Grundfläche ACB parallel geführter Schnitt angenommen wird, so kann man die senkrechte Höhe Di in der kleinen Pyramide durch Rechnung (*) finden, wenn die Linien AI und ai gemessen und bekannt sind, und dazu Ii, oder eine ihr gleich lauffende Linie. Damit läßt sich die ganze Pyramide DABC, und die kleine Dabc vollständig berechnen; und also die erwähnte Differenz ziehen.

Allein man hat es durch Hülfe der Algebra dahin gebracht, einzusehen, daß sich der Innhalt einer abgekürzten Pyramide einem viel kürzeren Calkul unterwerfen lasse, in welchem die Größe der Linie DI und Di gar nicht vorkommen, sondern blos das Qu. Maas der unteren Fläche ABC, und das der

---

(*) Die Gründe dieser Rechnung lassen sich durch Hülfe der ebenen Geometrie (mittelst etlicher Hülfs-Linien) bald nachweisen. Durch Anwendung der Trigonometrie geht aber die Beweisführung noch schneller, weil man dadurch die Winkel ADI und DAI leicht bestimmen, oder, wenn einer derselben aus unmittelbarer Messung (in Graden und Min.) bekannt wäre, die Höben DI und Di gar behend finden kann.

oberen abc, nebst der Distanz beeder Flächen, welche in der Figur = Ii ist, (*) und daß man behaupten könne, wenn in Kürze ABC = B, und abc = S genannt wird, daß das Product

$$\frac{1}{3} \cdot (Ii)\,(B + S + \sqrt[2]{BS}) = ABCabc$$ sey,

oder den Cub. Innh. der abgekürzten Pyramide gebe. Mit Worten heißt die Vorschrift: 1) Summire die 2 Flächen B + S. 2) Nimm ihr Product BS; und ziehe daraus die Qu. Wurzel. 3) Addire diese Wurzel zu B + S. 4) Multiplicire diese Summe mit $\frac{1}{3}$ der Höhe Ii. Das erhaltene Product ist der Innhalt des Körpers der abgekürzten Pyramide.

Einfacher läßt sich die Vorschrift dieser Berechnung gar nicht geben; aber der Beweis ihrer Richtigkeit gehört nicht unter die ganz leichten, für die Anfänger in der Algebra.

XXVIIste Frage.

Auf welche Weise hat man sich nun auch die Cubirung runder und walzenförmiger Körper vorzustellen? und was ist dabei vorzüglich zu beobachten?

Antwort. Man muß dabei vor allem die Grundfläche solcher Körper, insoferne sie unten eben sind, und auf dem Boden senkrecht stehen, seiner Aufmerk-

(*) Die Art und Weise, wie dieses zugehe, findet man in mehreren Schriften. Z. B. in Kästners Geom. und Stereom. im 62sten Saz, auch J. Tob. Majers Geom. Th. V. §. 79. Nr. 11.

samkeit zu unterwerfen. Die erste und am meisten hiebei vorkommende Annahme ist, daß diese Grundfläche ein Kreis, und der Umfang an den Grenzen des Körpers, unten, wo er auf den Boden steht, vollkommen zirkelrund sey. Die Fläche dieses Kreises wird, wie in der Elementar-Geometrie gezeigt wird, als ein reguläres Vielek von unendlich vielen kleinen Seiten betrachtet, und dieser Vorstellung gemäs, als eine Summe von gleichen Dreiekken berechnet. Der Halbmesser dieses Kreises wird gemessen, die ihm zukommende Zahl, (von Schuhen oder Zollen) ins Quadrat erhoben, und diese Zahl, (allgemein $= R^2$ ausgesprochen) mit $\frac{113}{355}$ multiplicirt, oder in Decimalen mit 3,1415926, wofür man aber nur 3,14 oder $\frac{314}{100}$ gewöhnlich sezt. Hiernach ist $(R^2 . 3{,}14)$ das Quad. Maas dieser Kreisfläche, allgemein $= Q$. Eben so viel ist

$\left(\frac{D^2}{4} . 3{,}14\right)$, insoferne der ganze Kreis-Diameter

$= D$ genannt wird, und der Halbmesser $\frac{D}{2} = R$,

folglich $\frac{D^2}{4} = R^2$ ist. In Fig. XIII. kommt der

zirkelrunden unteren Fläche der Durchmesser NM zu. Ihr Innhalt im Quadrat-Maas ist daher

$Q = (\frac{1}{2} NM)^2 . 3{,}14$ oder $(NM)^2 \frac{1}{4} . (3{,}14)$ welches übereinkommt mit $[D^2 . \frac{1}{4}(3{,}14)] = (R^2 . 3{,}14)$ Wäre $NM = 3$ Schuh lang, so ist der Kreis-Innhalt $Q = (3)^2 \frac{1}{4} (3{,}14)$ d. h. $[9 . \frac{1}{4}(3{,}14)] = 9 . (0{,}785)$

Weil der Factor $\frac{1}{4}$, und der andere 3,14 jederzeit in diesen Rechnungen vorkommen, so ist üblich, daß man nicht $\frac{1}{4}$ (3,14), sondern nur die einzige diesem Werth gleiche Zahl sezt, (0,785), damit das Product, welches den Innhalt der Kreisfläche giebt, allemal nur zwei Factoren im Calkul erfordern möge. Genauer und richtiger nimmt man 0,7854 als den gedachten beständigen Factor an, weil die scharfe Rechnung mit $\frac{1}{4}$. 3,1415926 auf die Zahl 0,785398 führt, für welche 0,7854 in Abkürzung mit viel größerem Recht (*) gesezt werden darf, als 0,783.

(*) In sehr vielen ältern Schriften bedient man sich des Bruchs $\frac{11}{14}$ als des beständigen Factors anstatt 0,785 oder 0,7854. Aber der Werth dieses Bruchs ist in Decimalen = 0,78571 und er liegt also höher, als die 3 angeführten, von welchen selbst 0,7854 schon etwas zu hoch steht. Wer nicht mit Decimalen rechnen kann, wird diesen Burch $\frac{11}{14}$ ungern verlassen, die Zahlen desselben sind klein und bequem. In vielen Fällen mag dessen Gebrauch auch geduldet werden. Er kommt übrigens von der Kreis-Verhältniß-Zahl (22 : 7) her, deren man sich ehedem fast immer bedient hat. Denn $\frac{1}{4}(\frac{22}{7})$ ist = $\frac{22}{28}$, welches $\frac{11}{14}$ gleich ist. Man muß diese 4 verschiedenen Annahmen kennen, weil man sich sonst die Abweichungen in vielen Rechnungs-Resultaten nicht erklären kann. (Siehe auch darüber meine Belehrungen, in Geom. S. 83. 84.)

Der Erfolg der Multiplikation ist daher, daß das Qu. Maas der Kreisfläche entweder als = 7,065 Q. Schuh; oder als 7,0686 Q. Schuh, oder als 7,06858.. Q. Sch. wird ausgesprochen werden, je nachdem man die eine oder die andere der gedachten Zahlen in der Eigenschaft eines Factors angenommen hat. Läßt man 7,0686 gelten, so ist hierauf mit der Höhe, z. B. mit FM = 5 in 7,0686 zu multipliciren, (eben als ob ein vierekkichtes Prisma vorhanden wäre) und das Produkt 35,343 ist der Cubik-Innhalt des vorgegebenen Körpers. Er wird eine Walze oder ein Cylinder genannt. Man macht sich, nach dieser Voraussezzung, leicht mit der Vorstellung vertraut, daß jeder Cylinder als ein Prisma von unendlich vielen gleichen Seiten, welche gleiche Höhe mit ihm (dem Cylinder) haben, anzusehen sey.

Jede Cylinder-Rechnung geht gleichförmig und auf die gezeigte Weise von statten. Die allgemeine Vorstellung der gedachten Operation dabei ist:

$[R^2 \cdot 3{,}14..)\ h]$ oder $[D^2 \cdot 0{,}7854 \cdot h]$ ist = C wo h die senkrechte Höhe des Cylinders bedeutet, C aber die Zahl des Cubik-Innhalts eben dieses Körpers selbst.

Wenn zwei Cylinder vorkommen, welchen einerlei Höhe, h, zukommt, deren Durchmesser aber ungleich in Länge sind, z. B. D = 3 Schuh der größere; d = $3\frac{1}{2}$ der kleinere, so verhalten sich ihre Cubik-Innhalte, wie die Quadrate dieser Durchmesser

(nicht wie deren Längen, D, d für sich.) Diesen Saz sieht man schnell ein, wenn man die Verhältnisse so in Gliedern darstellt: Es ist, wenn c der kleinere Cylinder hieße.

$D^2 . (0,7854) . h : d^2 . (0,7854) . h = C : c.$

Das ist so viel, als

$D^2 : d^2 = C : c.$

Weil die 2 Factoren (0,7854) . h im 1sten und 2ten Glied ganz gleich vorkommen, so dürfen sie in der Rechnung wegbleiben. Damit erkennt man, daß sich in Zahlen werden sezzen lassen:

$(3)^2 : (3\frac{1}{2})^2 = C : c$ oder 9 zu (12,25) wie C, der Cub. Innh. des größeren, welcher 35,343 ist, zu dem des kleinern, c. Der Betrag desselben mus = (12,25) . 35,343) div d. 9 seyn = 48,105..

Nach Fig. XVI. wird man für D, d die Linien AD, ad einrücken lassen können; und daher als Glieder einer Proportion, wie die angeführte ist, $AD^2 : ad^2$. Vergleicht man einen vorgegebenen schon berechneten Cylinder mit einem senkrechten vierekkichten Prisma, dessen Grundfläche eben so viel im Quadr. Maas halten soll, als der Cylinder, und verlangt die Länge der Grund-Linie des Prisma, damit man es zeichnen könne, zu wissen, so mus man aus der schon bekannten Zahl der Kreisfläche (des Cyl.) die Quadr. Wurzel ausziehen, welche bei $D = 3^1$, als $\sqrt[2]{7,0686}$ zu denken ist, oder, wirklich berechnet, = 2,6586. Die Höhe h bleibt aber auch beim Prisma eben

dieselbe, welche dem Cylinder zugekommen ist. Damit kann man die Zeichnung fertigen.

Soll aber die Grund-Linie des vierekkichten Prisma ganz der Länge des Cylinder-Durchmessers gleich seyn, und doch ein solches Prisma dargestellt werden, dessen Innhalt dem des Cylinders gleichkomme, so wird die Höhe des Prisma in diesem Fall jederzeit größer, als die des Cylinders ausfallen; und zwar wird sie allemal, als Zahl, ein Product seyn aus der Cylinder-Höhe mit 3,14.. multiplicirt.

Beweis dieser Behauptung.

Der Cylinder ist $= D^2 . (3{,}14..) h = 9 . (3{,}14..) . 5$ in dem vorigen Beispiel. Dem Prisma komme die noch unbekannte Höhe $= H$ zu; die Grund-Linie aber $= D$ nach der Voraussezzung. Also $D^2 . H$ der Cubik-Innhalt des Prisma ist jezt $= (9) . H$. Nothwendig folgt nun aus $D^2 . (3{,}14) . h = D^2 . H$ der Werth $(3{,}14) . h = H$, in concreto $(3{,}14...) . 5$. Damit ist die gesuchte Höhe des Prisma $= 15{,}700$ Cubik-Schuh, genauer $= 15{,}7079...$ oder $15{,}708$.

Man braucht die Kenntniß, Cylinder gehörig zu berechnen, bei unzählig-vielen Geräthschaften, Geschirren, Fruchtmaasen, Kufen und andern Gegenständen des gemeinen Lebens. Auch, wenn aus runden Stämmen Balken sollen gehauen, und wenn der Abfall soll bestimmt werden, mus man Stükke von Cylindern zu berechnen verstehen. (*)

(*) In meinen schon angeführten Belehrungen für

Es giebt ganze Bücher blos über einzelne Theile der gedachten Anwendung. Diese sind bei einzelnen verwikkelten Aufgaben insbesondere nachzusehen. Die wesentliche Säzze, welche allen einzelnen Anwendungen zum Grund liegen, sind aber gewiß die angedeuteten.

Folgende Beispiele mögen wohl ihre Stelle hier finden: 1) Das Württemb. Fruchtgefäs, Simmri genannt, ist als ein Cylinder geformet. Sein Innhalt ist gesezlich = $942\frac{1}{8}$ Württemb. Decimal-Cubik-Zolle. Nun komme ein solches Simmri uns vor, dessen Höhe, inwendig scharf gemessen, 9 Längen-Zolle betrage; der Durchmesser aber 12 solche Zolle. Es wird gefragt, ob der Innhalt nicht zu gros oder zu klein sey? Man denke so: D sey = 12; h = 9. Das Simmri, als Cylinder, wird (nach vorigen Säzzen) halten: $(12)^2 . (0,7854) . 9$. Die Rechnung giebt = 1017,8 Cubik-Zolle. Das Simmri enthält damit $75\frac{5}{7}$ Cub. Zoll mehr, als es halten soll.

Geom, wird man im Xten Abschn. S. 90 bis S. 100, was hierher dient, antreffen. Es kommen dabei allemal, Kreisabschnitt-Berechnungen vor. Diese sind mehr beschwerlich, als schwer. Man mus darinn geübt seyn, sie wohl zu führen. Auch bei vielen Gefäsen kann man es nicht umgehen, das Q. Maas solcher Abschnitte oft scharf zu bestimmen. Auch hierüber wird man in dem erstangeführten Buch S. 128 . . . 130 Auskunft finden.

Wie lang sollte der Durchmesser D aber wirklich seyn, wenn die Höhe h = 9 bleiben sollte? Der Saz ist nun so zu stellen: D^2 ist = $\frac{942,175}{(0,7854)\cdot 9}$. Man erhält = 1,33280. Die Quadr. Wurzel hieraus ist = 11,544 .. Würt. Längen-Zolle. Hiernach mus der Durchmesser beinahe ½ Zoll kürzer, als 12 Zolle in Länge betragen, wenn (bei h = 9. Zoll) das Simmri den ganz richtigen Gehalt haben soll. (Es ist aber hiebei der Cylinder ganz hohl, ohne den eisernen Steg, angenommen. Wird dieser mit in den Anschlag gebracht, so mus der Zahl von 11,544 Zollen noch etwas zugegeben werden.)

2) Die Baierische Fruchtmezze ist bedeutend größer, als das Württemb. Simmri; sie hält 1490,66 Bajer. Decimal-Cub. Zolle, welchen 1576,05 Würt. Cubik-Zolle gleich kommen. (*)

(*) Man wird dieses Aequivalent finden, wenn man folgendes voraussezt: Die Bajerische und die Württemb. Längenmaase verhalten sich gesezlich, wie 1293,8 : 1270; und, wie die Würfel dieser Zahlen, ihre Cub. Maase. Man findet dieses Verhältnis, in kleinen Zahlen gesezt = 10 zu 10,5728. Und dieses ergiebt sich so, wie folgt:

Cub. von 1270 zu Cub. von 1293,8 = 1 : 1,05728. Mit Logarithmen stellt sich dieses bald dar:

Log. 1293,8 = 3,1118671	Zu dem lezten Logar. gehört
Log. 1270 = 3,1038037	die Absolut-Zahl 1,03728.
Log. (1,01874 = 0,0080634	So viel Würt. Cubik-Zolle
3mal genom̃. = 0,0241902	werden zu 1 Baj. Decim.
	Cub. Zoll erfordert.

Wenn nun gefordert würde, daß dieses Fruchtgefäs (cylindrisch, wie das Würt. Simmri geformt) die Höhe haben sollte h = 9 Würt. Zolle, (wie das vorige Würt. Sri.) wie lang müßte der Diameter dieses Gefäses seyn? Hier würde $D = \sqrt[2]{\left(\frac{1,67605}{0,7854 \cdot 9}\right)}$ seyn. Der Calkul giebt = 17,7107 Zolle. Also 17 Zoll $7\frac{1}{10}$ Lin. (Würt. Längen-Maas) müßte dieser Durchmesser betragen.

XXVIIIste Frage.

Wenn aber Körper vorkommen, deren untere Fläche zwar auch ein Kreis, (wie bei dem Cylinder) aber ein größerer, als der parallele obere wäre, wo also die Seiten-Linie des Körpers nicht senkrecht, sondern geneigt hinauf liesse, wie wird hiebei die Cubirung vorzunehmen seyn?

Antwort. Ein solcher Körper wird ein abgekürzter Kegel, oder abgestumpfter Conus genannt. Ehe man die Art seiner Berechnung kennen zu lernen sich anschikt, mus man mit der eines vollkommenen Kegels oder Conus bekannt seyn.

Jeder Conus läßt sich als eine ordentliche, gleich-

Hieraus giebt sich nun durch eine Proportion die obenstehende Zahl 1576,05 so:

10 : 10,5728 = 1490,66 : 1576o,5. Daraus läßt sich auch noch folgern, daß $1\frac{2}{3}$ Württ. Simmri zu 1 Bajer. Mezze gehören.

hohe Pyramide, deren Grundflächen ~~in~~ Vielek von unendlich vielen gleichen Seiten wäre, ansehen, ganz so, wie jeder Cylinder, als ein Prisma von unendlich vielen gleichen Seiten (nach S. 146.) So wie nun die Pyramide der dritte Theil des gleich-hohen Prisma ist, welches mit ihm eine gleiche Grundfläche, und gleiche Seiten auf dieser Fläche hat, (nach S. 140.) eben so läßt sich auch der Conus als ein Drittel des gleich-hohen Cylinders betrachten. Man bleibt hiebei ganz ebenderselben Vorstellungs-Weise getreu.

Ein Conus, dessen unterer Fläche daher ein Durchmesser D = 3 zukäme, die Höhe aber h = 5, wird zum Cubik-Innhalt haben

$\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot (0,7854) \cdot 5 = \frac{1}{3} \cdot (35,343) = 11,781$

oder 11 Cub. Schuh 781 C. Zoll, wenn D = 3 Längen-Schuhe bedeutet.

Der abgestumpfte Kegel wird als die Differenz von zwei ganzen Kegeln angesehen, wie in Fig. XIV. als DACB, Dacb sich darstellen. Der Innhalt des erstern, des unteren ist $= \frac{1}{3} (AB)^2 (0,7854) . DI$; und des kleineren, des oberen, ist $= \frac{1}{3} (ab)^2 . (0,7854) . Di$. Bei dieser Rechnug mus man also die 2 Höhen kennen, und die zwei Durchmesser. Aber die Höhe DI ist nicht unmittelbar gegeben. Sie muß erst durch Schlüsse, ganz so wie bei der abgekürzten senkrechten Pyramide (nach S. 142.) statt finden, gesucht werden. Aus DI findet man hienächst Di, insoferne offanbar Di = DI — Ii

ist, und Ii sich unmittelbar, oder durch eine Parallele von aussen, messen läßt.

Allein, so wie man durch algebraische Künste einen kürzeren Weg ausgesonnen hat, um den Cubik-Innhalt der abgekürzten Pyramide zu finden, ohne die Höhe der ganzen Pyramide und des oben gegen die Spizze zu fehlenden Pyr. Stüks dazu in die Rechnung aufnehmen zu müssen, (siehe oben S. 143.) eben so kann man den abgekürzten Kegel, vermittelst eines ganz ähnlichen Rechnungs-Ansazzes finden. Bei der abgekürzten Pyramide heißt die

Formel des Innhalts $= \frac{1}{3}$ Ii $(B + S + \sqrt[2]{B.S})$
und bei dem abgekürzten Kegel ist die

Formel d. Innh. $= \frac{1}{3}$.Ii.$(B + S + \sqrt[2]{B.S})$.(3,14..)
wobei jezt B die Fläche des untern Kreises, S die des obern (des kleinen) bedeutet; Ii aber die die Distanz der gedachten 2 Kreisflächen, oder die innere senkrechte Höhe in dem abgestumpften Conus.

Es läßt sich leicht bemerken, daß, weil die Factoren ($\frac{1}{3}$. 3,14) oder genauer $\frac{1}{3}$(3,1415926). ohne Ausnahme, allemal in dieser Rechnung vorkommen, das Product als eine Zahl = 1,047 oder genauer 1,04719 sich zu Abkürzung des Calkuls sezzen lassen.

Manche gebrauchen dafür den Bruch $\frac{22}{21}$, oder, $1\frac{1}{21}$; und machen sich dadurch die Rechnung bequemer. Da aber $1\frac{1}{21} = 1{,}047619$ ist, so steht diese Zahl-Größe zu hoch; und es ist dabei eben dasselbe zu erinnern, was bei dem oben angeführten Bruch

$\frac{11}{14}$, der anstatt der richtigern 0,7854. (siehe S. 145.) gelten soll, erinnert worden ist.

Es ist eine gute Uebung, wenn derjenige, bei dem man die hier angedeuteten Kenntnisse voraussezzen darf, sich eine kurze Reihe von abgekürzten Kegeln berechne, nach folgenden Bestimmungen:

Der Diameter der untern Kreisfläche sey D = 10 Zoll lang, der der obern d = 9; die Höhe = 10, wie der untere Durchmesser. So sey der erste Körper dieser Art bestimmt.

Bei dem 2ten soll der untere Diameter wieder D = 10 Zoll haben; der obere d = 8; die Höhe abee, wie vorher = 10.

Bei dem 3ten, 4ten, 5ten . . . bleibe immer D = 10; dagegen nehme d immer um einen Zoll ab. Von d = 7 bis d = 1. Die Höhe h müsse aber beständig = 10 seyn.

Die Bemerkung, wie die Cubik-Innhalte dieser Körper abnehmen, ist lehrreich; und man kann diese Größen, bei der Schäzzung vieler Gefäse wohl brauchen.

Ueber die Berechnung schief stehender Kegel läßt sich eben das behaupten, was oben (S. 139.) über die schief stehende Parallelepipeda vorgetragen worden. Immer mus nur die senkrechte Höhe, als Factor, in die Rechnung des Innhalts aufgenommen werden; das heißt, hier das gemessene Loth, welches von der gleichsam überhängenden Spizze

des Conus auf seine erweiterte Grundfläche fallend, gedacht wird.

XXIXste Frage.

Da so viele Körper gewölbt oder bauchicht sich zeigen, so kann doch wohl die bisher angewendete Methode nicht zureichen, um den Cubik-Innhalt solcher so ganz verschieden geformter Körper zu bestimmen?

Antwort. Man ist allerdings genöthiget bei solchen Körpern auf die Betrachtung der Kugel, und des Ellipsoids, wie auch der (vor allem) durch parallele Schnitte aus diesen Körpern erhaltenen Stükke überzugehen. Es giebt zwar Wölbungen von unendlich-verschiedener Krümmung, bei welchen man noch andere krumme Linien, als die des Kreises und der Ellipse zu Hülfe nehmen mus. Aber eine gute Bekanntschaft der erst genannten Curven, und der bei ihnen statt habenden Cubatur dient doch zu einer solchen Menge von Ausmessungen gewölbter und bauchicht geformter Körper, daß der praktische Meßkünstler schon sehr viel leisten kann, wenn er nur die rechte Weise versteht, cubische Berechnungen unter der Voraussezzung zu führen, es seyen die ihm vorkommenden Körper, Kugeln oder Ellipsoiden oder abgeschnittene Stükke von beiden.

Der Innhalt einer jeden Kugel ist, wenn ihr Durchmesser D genannt wird, allgemein

$= \frac{1}{6} . D^3 . (3,1415926)$ und derselbe beträgt $\frac{2}{3}$tel des Innhalts von dem Cylinder, in welchem die Kugel als liegend gedacht wird, so daß ihr Durchmesser mit der Höhe des Cylinders übereinkäme.

Diese Sätze sind in unzähligen Schriften, (bald genau, bald weniger genau) bewiesen.

Man denke sich eine Halbkugel, und führe einen Schnitt durch den obern Theil derselben, parallel mit der untern Kreisfläche der Halbkugel, welche deren Grundfläche wohl heißen darf. Das oben abgeschnittene Stük heißt ein Kugel-Abschnitt; das untere ist ein bauchichter Körper, welcher oben eine kleinere Kreisfläche hat, als unten. Beede sind, wie gedacht, parallel. Man kann jederzeit den Cubik-Innhalt eines solchen abgeschnittenen Stüks berechnen, wenn man den Durchmesser der Kugel, und die Höhe des Kugelabschnitts kennt.

Auch wenn von einem Ellipsoid durch zwei parallele Schnitte ein solcher bauchichter Körper hervorgebracht wird, läßt sich dessen Cubik-Innhalt, wenn gewisse Linien der Ellipse gegeben sind, finden, wie sogleich gezeigt werden soll.

Man sehe die Fig. XVIII. wo eine Ellipse mit der großen Axe AX,, und der kleinen DC steht. Der Körper, welchen man Ellipsoid nennt, wird erzeugt, wenn sich die Fläche einer halben Ellipse wie ADX um die große Axe AX dreht. Führt man einen Schnitt durch die Mitte des Körpers, durch

DC, und einen parallelen durch NM und denkt sich das vordere Stük, als abgeschnitten, so bleibt ein bauchichter Körper, DCMN, übrig.

Das abgeschnittene Stük ANM nennt man ein elliptisches Sphaeroid. Es ist hier das, was bei der Kugel der Kugel-Abschnitt ist. Wir wollen beede näher mit einander vergleichen; es ist wichtig für den praktischen Meßkünstler, daß er beede cubisch zu berechnen verstehe. Die ganze Lehre hievon läßt sich nicht in Kürze vortragen. Wir beschränken uns auf folgende Säzze:

1) Der Cubik-Innhalt jeder Kugel ist zugleich mit ihrem Durchmesser gegeben; er ist $= \frac{1}{6} D^3 . (3,14..)$ welche Bezeichnung die schärfer-berechnete Zahl 3,1415926 hier immer bedeuten soll.

2) Bei einem Kugel-Abschnitt muß man die Höhe des Abschnitts kennen, nebst dem Diameter der Kugel. Wird in Fig. XVIII. die krumme Linie AN circular gedacht, desgleichen auch AM, so kann man sich An als die Höhe eines solchen Kugel-Abschnitts denken. Man nenne $An = x$. Der Innhalt eines solchen Kugel-Abschnitts läßt sich allemal nach der Formel $= \frac{1}{6} (3,14) . xx . (3D - 2x)$ berechnen. Es giebt aber auch noch anders gebildete Formeln, welche jedoch im Wesentlichen immer mit dieser übereinkommen. (*). Den Beweis der Richtigkeit der

(*) Mehrere derselben sind angeführt und erläutert in mein. Belehr. für Geom. im XIten Abschn. S. 106 — S. 110.

in dieser Formel selbst liegenden Vorschrift kann man in vielen Schriften finden.

Man sieht wohl leicht ein, daß, wenn der Durchmesser der Kugel A genannt würde, anstatt D, dem Kugel-Abschnitt der Ausdruk $= \frac{1}{6}$ (3,14). xx. (3 A — 2 x) zukommen müsse (welchen wir bald hernach benüzzen werden). Immer ist der Sinn der Vorschrift dieser: 1) Nimm die Zahl des Kreis-Diameters 3mal, und ziehe die doppelte der Höhe des Abschnitts ab; 2) diese Differenz multipl. mit dem Quadrat dieser Höhe (xx); und 3) multipl. ferner dieses Product mit $\frac{1}{6}$ (3,14).

3) Wenn man diesen Kugel-Abschnitt von der halbirt gedachten Kugel, (von der Halbkugel) wirklich ganz weg nimmt, so bleibt ein bauchichter Körper, wie gedacht, übrig, welchen man sich selbst auch bei Fig. XVIII. vorstellen kann, als DCNM, insoferne man die Bogen ND und MC circularisch denken mag, gleich als ob ADC eine Halbkugel wäre. Ein solcher Körper mit circularen Krümmungen an den Seiten, auf einer Kreisfläche senkrecht stehend, zu welcher DC als Kreis-Diam. gälte, wird den Cubik-Innhalt haben

$$= \frac{1}{12} (3{,}14) \cdot [D^3 - xx\,(6D - 4x)]$$

Man sieht bald ein, daß dieser Ausdruk hervorgehe, wenn man den Abzug folgender Größen vornimmt

$$\frac{1}{12} \cdot D^3 (3{,}14) - \frac{1}{6} xx\,(3{,}14)\,(3D - 2x)$$

d. h. Halb-Kugel weniger d. Kugel-Abschnitt.

Man darf nur die lezte Größe $= \frac{2}{12}$ (3,14) (3 D — 2 x)

schreiben, welche damit auch $= \frac{1}{12}(3{,}14).(6D - 4x)$ ist, so erkennt man die Richtigkeit des Ausdruks für den bauchichten Körper.

4) Jezt gehen wir zu dem Ellipsoid. Dessen cub. Innhalt ist, wie in Schriften der höheren Analysis gezeigt wird, allgemein $= \frac{1}{6}.VV.A.(3{,}14)$ wenn die große Axe der Ellipse $AX = A$ genannt wird, die kleine $DC = V$ (beedes der Kürze wegen). Ein Schnitt, durch DC geführt, giebt die Hälfte des Ellipsoids, welches also $= \frac{1}{12}.VV.A(3{,}14)$ seyn müs.

5) Ein zweiter paralleler Schnitt durch NM geführt, bringt, wie schon gedacht, das elliptische Sphäroid ANM hervor. Dessen cübischer Innhalt wird durch folgende Buchstaben-Formel ausgedrükt:

$$\frac{1}{6}(3{,}14).\frac{VV}{AA}.(An)^2.(3A - 2An)$$

$$\text{od.}\ \frac{1}{6}.(3{,}14).\frac{VV}{AA}.(xx).(3A - 2x)$$

Der Beweis davon ist in den obengedachten Schriften nachzusuchen.

6) Man vergleiche diese Formel mit der des Kugel-Abschnitts, insbesondere mit der in der 2ten Form aufgeführten, welche $= \frac{1}{6}(3{,}14)\,xx.(3A - 2x)$ heißt (nach S. 158.)

Die des ellipt. Sphäroids hat blos einen Factor mehr, nehmlich den Quotienten oder Bruch $\frac{VV}{AA}$. Dieser Factor ist allemal ein ächter Bruch,

weil V die kleine Axe, A die größe der Ellipse bedeutet, also der Zähler jedesmal kleiner, als der Nenner ist. Aus dieser Betrachtung fliest eine wichtige Folgerung.

„Das elliptische Sphäroid mus immer kleiner „seyn, d. h. einen geringen Cubik-Innhalt haben, „als der Kugel-Abschnitt, welcher mit jenem gleiche „Höhe (An = x) hat, wenn es zu einer Ellipse „gehört, deren große Axe der Kugel-Axe gleich ist." Diese Wahrheit sprechen gleichsam unsere 2 Formeln selbst aus. Sie stimmt aber auch mit dem überein, was man aus geometrischen Constructionen deduciren kann. Aber eben diese Formeln lehren noch mehr. Man erfährt durch sie nicht nur, welches dieser 2 Sphäroiden immer das größere sey, sondern auch um wie viel das der Kugel größer sey, als das des Ellipsoids.

Man stelle die Werthe nur neben einander, so ergiebt sogleich die Proportion:

$$\left(\frac{3{,}14}{6}\right) \cdot \frac{VV}{AA} \cdot xx(3A-2x) : \left(\frac{3{,}14}{6}\right) xx(3A-2x)$$

ist = VV : AA.

Das ellipt. Sphäroid verhält sich hiernach jederzeit zu dem Kugel-Abschnitt, wie das Quadrat der kleinen Ellipsen-Axe zum Quadrat der größern, oder zum Quadr. des Kugel-Durchmessers, dessen Länge hier der großen Ellipsen-Axe immer gleich gedacht werden mus, A = D.

Es ist daher mit jedem Kugel-Abschnitt sogleich das zugehörige elliptische Sphäroid, vermöge dieser Formel, schon gegeben; und so auch umgekehrt.

7) Läßt man in Gedanken die Größe V wachsen, bis sie die Größe A erreicht, so wird aus $\frac{VV}{AA}$ nothwendig $\frac{AA}{AA}$, das heißt $= 1$ werden. In diesem Fall geht dann die Formel des ellipt: Sphäroids in die des Kugel-Abschnitts über. Dieses trifft ganz mit derjenigen Vorstellung überein, nach welcher man aus der Figur einer Ellipse nach und nach die eines Kreises erhält, wenn man, mit Beihaltung der grossen Axe (A), die kleine (hier V genannt) immer zunehmen läßt, bis sie in Länge der großen gleich kommt.

Man bekommt den Cubik-Innhalt eines bauchichten Körpers, wie DCMN in Fig. XVIII. ist, bei Annahme elliptischer Krümmung, durch die Differenz zwischen dem halben Ellipsoid, und dem Sphaeroid der Ellipse, als

$$[\tfrac{1}{12}.VV.A(3,14)] - [\tfrac{1}{6}(3,14).\frac{VV}{AA}.(xx).(3A-2x)]$$

kürzer gefaßt:

$$= \tfrac{1}{12}.(3,14)\frac{VV}{AA}.[A^3 - xx.(6A-4x)]$$

Diesen Werth vergleiche man mit dem für den bauchichten Körper mit circulärer Krümmung, welcher

$\frac{1}{12}$ (3,14) (A^3—xx) (6A—4x) heißt, (nach S. 158.) wenn A = D genommen wird, wie immer verstattet ist. Auch diese 2 bauchichten Körper werden sich daher wie VV gegen AA, d. h. wie die 2 Sphäroiden, unter angenommener Voraussezzung, verhalten.

Das doppelte des bisher beleuchteten Körpers in Fig. XVIII. oder 2. DCMN oder MNFO ist das, was man ein abgekürztes Ellipsoid heißt.

8) Wenn ein solches, oder dessen Helfte DCMN (als Gefäs, als eine Kufen-Art,) vorkommt, so ist die große Axe der Ellipse damit nicht unmittelbar gegeben. Aber man kann sie aus den vorhandenen Linien DC, NM, Kn jedesmal durch Rechnung leicht finden. Die Formel dazu heißt:

Die große Axe A ist $= \frac{V.L}{\sqrt[2]{(VV-FF)}}$, wenn man der Kürze wegen NM mit F bezeichnet, und no oder (2Kn) mit L, als der doppelten Länge des Körpers. Es ist von sehr großem Nuzzen, daß sich auf diese Weise die Länge der großen Axe immer so leicht bestimmen läßt, und daß man durch Hülfe einer so kurzen Formel eine Fiction gleichsam in Würklichkeit übersezzen kann.

Auch das ganze Ellipsoid läßt sich mittelst der 3 gegebenen Größen V, F und L allein gehörig ausdrükken und vollständig berechnen. Die Beweise hierüber mus man aber in algebraischen Schriften nach-

suchen. Die Gleichung für das ganze abgekürzte Ellipsoid, oder für 2 DCMN fällt so aus

$$= (2VV + FF) \cdot L \cdot \tfrac{1}{12} (3{,}14)$$

Für das halbe, oder für den Körper DCMN daher $(2VV + FF) \tfrac{1}{2} L. \tfrac{1}{12} (3{,}14)$ gelten. Dieser Ausdruk ist in praktischem Gebrauch sehr anzuwenden, weil gewöhnlich nur die Längen V, F und L oder $\tfrac{1}{2}$ L unmittelbar gemessene Größen, d. h. unmittelbar gegeben sind.

XXXste Frage.

Da man Körper von so sehr verschiedenen Formen auf die mehrgezeigte Weise ausmessen und berechnen kann, so wird doch die eine oder die andere derselben besonders geeignet seyn, auch auf die cubische Berechnung von Gewölben angewendet zu werden?

Antwort. Die Form und Construction der Gewölbe ist so sehr verschieden, daß sich deren Ausmessung und Berechnungs-Art nicht auf etliche wenige Säzze zurükführen läßt. Viele Gewölbe sind rein circulair, viele aus sogenannten gedrükten Kreuzbögen zusammengesezt, viele parabolisch, elliptisch u. s. w.

Wenn sie rein circular sind, so hat die Berechnung nicht grose Schwierigkeit, insoferne man nur zwei concentrische Halbkreise berechnen, die Fläche des kleinen von der des größern abziehen, und die damit

vorhandene Größe des Kreis-Rings mit der Tiefe des Gewölbs, als dem dritten Factor, multipliciren darf.

Aber die Gewölbe sind oft von ungleicher Dikke; oben, am Scheitelpunkt gewöhnlich dünner, als unten an der Streb-Mauer, nahe an den Schlußsteinen. Dabei sind also mehrere Abmessungen vorzunehmen, und oft ein Kreis-Abschnitt von einem andern, oder von einem Halbkreis, welcher zu einem größeren Durchmesser gehört, abzuziehen. Auch wohl wanchmal ein Halbkreis von einer Ellipse und umgekehrt. — Darüber mus man sich nun in eigenen größern Werken umsehen. (*)

Indessen giebt es doch eine Gewölbs-Gattung über welche sich selbst in wenigen Zeilen vieles, was wohl gefaßt werden kann, (wenn man nur auf die Beweise dazu Verzicht thut) beibringen läßt. Die untere Grenze eines Gewölbes sey ein geradlinichtes regelmäßiges Vielek, wie das in Fig. XIX. gezeichnete ein reguläres Sechsek ist. Die krummen Linien, alle von einem Punkt A ausgehend, seyen Quadranten eines Kreises, wie AB, AE, AP.... Eine Seite des Vieleks sey aus unmittelbarer Messung bekannt,

---

(*) In der mehr-angeführten Belehr. für Geom. ist der XIIIte Abschnitt S. 122 bis 130. auch vieles in den folgenden Abschnitten dem nöthigen Verfahren dabei gewiedmet.

EP, hier EP = EC beim Sechsek, in andern Fällen EP und EC; dazu die Höhe des Gewölbs, AC.

Man erhält den Cubik-Innhalt dieses Gewölbs, wenn man die Fläche des Vieleks, hier die des Sechseks, berechnet, und diese Flächen-Zahl mit ⅔tel der Höhe AC multiplicirt.

Mit dieser einfachen Operation ist die Körper-Messung und Cubirung bei diesem Gewölb ganz vollführt. Man giebt ihm die Benennung Kloster-Gewölb, und es behält dieselbe, auch wenn die Bögen AB, AD... keine ganze Quadranten sind; sondern nur Stükke davon, wie durch AM in der Fig. XIX. angedeutet wird.

Führt man durch die Linie MI in diesem Körper einen der Ebene des untern Vieleks parallelen Schnitt, so erhält man ein kleineres ähnliches Kloster-Gewölb, weil dieser Schnitt ein kleineres, dem untern ganz ähnliches Vielek hervorbringt. Wäre ein solches kleineres zuerst vorhanden, so mus man mittelst der leicht einzusehenden Proportion:

$$AI : AM = AM : 2\,AC$$

die Größe von AC bestimmen, und so auch die andern Linien zu dem größern Vielek mit den ganzen Quadranten. Dieses wird nun als selbst vorhanden durch eine Fiction angenommen, und sein Cub. Innhalt, wie gezeigt worden, berechnet. Es heiße = T; das Qu. Maas seines Vieleks aber F; das des obern kleinern Gewölbs heiße f. Dieses kennt man (der

ersten Annahme nach). Den Cubik-Innhalt des gesuchten kleinern Gewölbs findet man nun allemal, (wenigstens in brauchbarer Näherung) mittelst der Proportion:

F zu f wie T zu t.

Um die Dikke solcher Gewölber, in den meisten Fällen doch nahe zu, zu erhalten, nimmt man abermals durch eine Fiction an, ein solches kleineres Gewölb (t) lasse sich an AC, wie an einer durchgehenden Axe senkrecht etwas herabrukken. Die Differenz zwischen dem Cubik-Innhalt des großen und des kleinen Gewölbs giebt nun den cubischen Betrag der Dikke, nach welcher die Frage gegangen war. Oefters wird man aber auch 2 oder 3 kleinere berechnen und von einander abziehen müssen. Die schärfere Methode, nach welcher man strenge hiebei die Rechnung vollführt, wird von Baukünstlern, welche nur Geometer sind, nicht wohl angewendet werden können.

Uebrigens ist es merkwürdig, daß das vorgetragene Gesez dieser einfachen Cubirung noch besteht, und bleibt, auch wenn nicht Zirkel-Quadranten, sondern elliptische Quadranten vorhanden wären, so daß die Linie BD die große Axe einer Ellipse wäre; die Höhe AC aber als die Helfte der kleinen Axe angesehen würde. Die untere Vielekfläche wird in diesem Fall zwar nicht aus gleichen Dreiekken bestehen, aber doch aus regulären geradlinichten, von welchen sich je zwei, welche gegen einander über lie-

gen, gleich sind. Die Berechnung dieser untern Fläche wird deshalb immer leicht seyn. Sie heiße = F, so ist auch hier das Product ⅔ AC . (F) der Cubik-Innhalt eines solchen Gewölbs. Zu dem Beweis dieses Sazzes braucht man Differenzial-Rechnung, so wie auch schon zu dem S. 165. behaupteten ersten.

Anzeige und Berichtigung
etlicher, in vielen Schriften verbreiteter unrichtiger Angaben; als Nachtrag zu S. 149.

Seit 30 Jahren steht in wohl mehr als 100 Schriften, welche die Vergleichungen von Getraide-Maasen enthalten, die fehlerhafte Behauptung, daß 1 Würt. Scheffel 7835 Pariser Cubik-Zolle halte, also $\frac{1}{8}$tel hievon, oder 1 Würt. Simri $979\frac{3}{8}$ solcher Cubik-Zolle. Der W. Scheffel hält aber $8934\frac{4}{10}$ Paris. Cub. Zolle, und das Simri $1116\frac{8}{10}$ dergleichen. Einige gemachte Erinnerungen gegen diese Irrung sind bisher fruchtlos gewesen. Der Fehler wird immer wieder in neuen Schriften aufgenommen. Daß dem Würt. Simri wirklich $1116\frac{8}{10}$ Par. Cub. Zolle zukommen, davon überzeugt sich jeder, der folgende Verhältnisse anerkennt:

Der Würtemb. Längen-Schuh verh. sich gesezlich und nach genauer Prüfung gegen den Pariser (Alt-Pariser) wie 1270 gegen 1440. Also der Würt. Cub. Schuh gegen den Pariser, wie die Cub. Zahlen dieser Größen. Nun besteht die Proportion:
Cub. von 144 zu Cub. von 127 wie 1000 zu 685,999. Also 1000 Würt. Cubik-Schuh werden zu $685\frac{99}{100}$ Pariser Cub. Schuh zur Gleichstellung erfordert; und 1 Würt. C. Schuh ist = 0,685999 Par. Schuh.

Unser Würt. Simri hält $942\frac{1}{8}$ Würt. Cubik-Zoll. Diese schreibe man als ein Fragment eines Würt. Schuhs = 0,942125 Sch. Und nun gilt die Proportion

$$\underbrace{1 : 0{,}942125}_{\text{Württemb.}} = \underbrace{0{,}685999 : 0{,}646297}_{\text{Paris.}}$$

Die lezte Zahl ist ein Bruch von einem Alt-Pariser Cubik-Schuh; und da dieser immer in 1728 Theile eingetheilt zu werden pflegt, d. h. in Duodecim. C. Zolle; so mus man die im 4ten Glied erhaltene Zahl mit 1728 multipliciren. — Damit erhält man

$$(0{,}646297) \cdot 1728 = 1116{,}8 \text{ Paris. Cub. Zolle,}$$

und eben dadurch eine bedeutend größere, als die angeführte irrige $979\frac{3}{8}$.

2) Das angegebene Längen-Verhältniß zwischen dem Alt-Pariser und Würt. Maas 1440 : 1270 ist gesezlich-ausgesprochen (im J. 1806) nachdem durch eine niedergesezte Commißion von Räthen und Mathematikern scharfe Prüfungen vorgenommen und sehr genaue Pariser Stäbe mit dem Württemb. Mutter-Maas verglichen worden waren. Ehedem stand in vielen Büchern, daß das Verhältnis 1440 : 1268 statt habe. Die gesezliche Zahl 1270 weicht wenig von der erst angeführten 1268 ab. Bedeutender ist eine Abweichung, welche sich auf die Angabe eines sehr verdienstvollen Gelehrten, Tobias Majer, des ältern, gründet. Diesem müssen nicht ganz genaue Pariser oder Württemb. Maasstäbe in die Hände gekommen seyn, aus welchen er schloß, das Verhältniß habe statt:

1440 : 1278. Und diese Zahlen sind auch in viele Bücher übergegangen, und werden noch jezt in vielen wiederhohlt. Wahrscheinlich hat der scharf-prüfende Mann für sich nicht unrichtig gemessen, und die Schuld lag wohl blos in den Stäben, welche er eben in die Hände bekommen hatte. Genug, diese Zahlen würden auf den Saz führen, daß 1000 Würt. Cubik-Schuhe zu 699,045 Alt-Pariser erforderlich wären. Daraus würde durch ähnliche Schlüsse, wie die angeführten, folgen, daß einem Würt. Simmri 1138 Paris. Duodec. Cub. Zolle zukämen; also etwas über 21 mehr, als ihm wirklich zukommen, welche 1116,8 oder 1117, und nicht mehr, sind.

Drukfehler.

S. 18. Lin. 18 u. Lin. 19 statt 704 lies 740, (dieses 3mal).
— — Lin. 19 statt 1750 lies 1728.
S. 25. Lin. 7 statt VIIte lies VIte.
S. 125. Lin. 3, soll das 3te AD ohne Strich auf dem D stehen.
S. 141. Lin. 3. statt BFCA lies BFEA.
Lin. 4. statt DFE lies BAC.
S. 152. Lin. 1. statt in lies ein.

Zusaz zu Seite 121 der Anleit. zur Cub. Rechn.

Zu Nr. V. auf die Fr. XXIII. gehört noch folgendes:

Die Linien AG und AE sind 2 geometr. Mittelproportional-Linien zwischen AG und AE. Dieses erkennt man so:

1) Der Fig. VII* gemäs, gilt gewiß

AG : AB = AD : AE

Allein, eben dieser Figur gemäs, haben, wegen der ähnl. Dreiekke, zwei stetige und zusammenhängende Proportionen statt:

AG : AB = AB : AD

und AB : AD = AD : AE

Aus der Lehre der geom. Progression ist bekannt, daß aus 4 zunächst auf einanderfolgenden Gliedern einer solchen Progression sich 2 stetige geom. Proportionen bilden lassen, wie die eben angeführten sind. Diese 4 Glieder sind in unserm Fall:

AG : AB : AD : AE

Und AB, AD, sind offenbar die behaupteten 2 mittlern Proportional-Linien.

2) Es ist ein bekannter arithm. Saz, in der Lehre der Reihen, daß, wenn a : x : y : z vier nächste Glieder einer geom. Progression sind, immer der Würfel des 1sten zum Würf. des 2ten sich verhalte, wie das 1ste Glied (nicht cubirt) zum 4ten, oder $a^2 : x^3 = a : z$. Es fragt sich, ob dieses auch bei unsern 4 Linien zutreffe? Allerdings! Denn man sezze nur, wenn man die Größen hinstellt: $AG^3 : AB^3 = AG : AE$ den auf S. 116 erwiesenen Werth für das 2te Glied ein, so erhält man $AG^3 : (AG^2 . AE) = AG : AE$.

Aber nach den Elementen der Buchstaben-Rechn. betragen die 2 ersten Glieder nicht mehr, als AG : AE; und kommen daher mit den 2 lezten überein. Es wird also auch hiedurch der behauptete Saz bewährt.

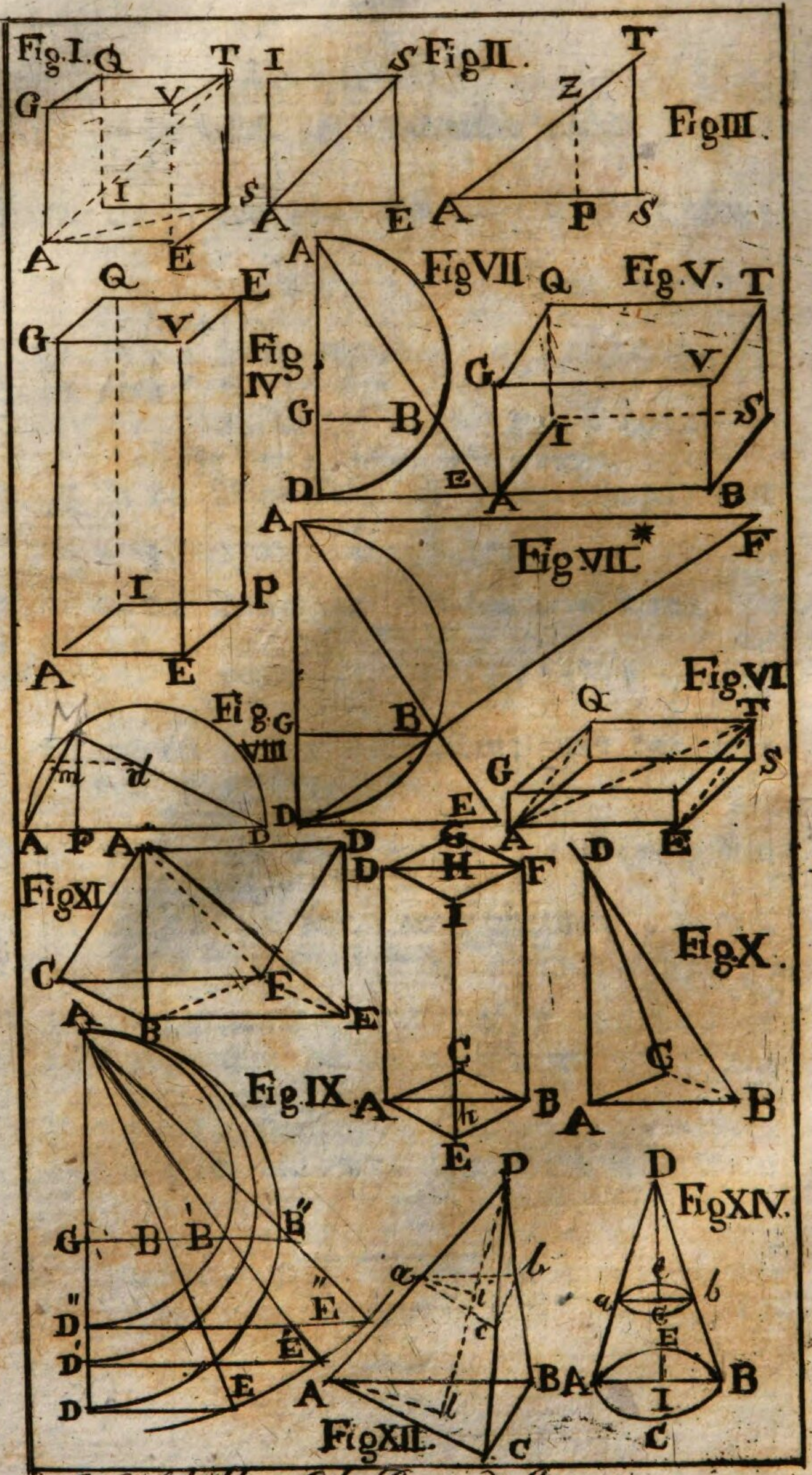
Drukfehler,

zu der Anleit. zur Cubik=Rechn. gehörig.

S. 17. Lin. 7. von unten (im Text) anstatt 5,58033 lies 6,58033.
= = Lin. 4. von unten — — statt 36,7046 l. 36,7406.
S. 41. in den Mitte bei $\frac{7}{1728}$ l. 0,0040509259.
S. 42. oben statt 3,002825 l. 3,0028935.
= = = Sogleich darauf statt 835 l. 893,5.
= = = In der nächsten Zeile ebenso.
S. 48. in der Mitte (die erste Cubik=Wurzel) statt $\sqrt[3]{3}$ | 1,2599 l. $\sqrt[3]{2}$ | 1,2599.
S. 61. in der Mitte statt $\sqrt[2]{1,124}$ l. $\sqrt[3]{1,124}$.
S. 62. Lin. 1. statt $1\frac{5}{39}$ l. $1\frac{11}{39}$.
= = = 9. von unten statt (4 . 24) . 1 + lies (4 . 24) + 1.
S. 65 und 66 sind auszuschneiden; und das ganz neue Blatt einzusezzen. (Siehe in dem letzten Bogen.)
S. 88. Lin. 3. von unten statt 5, l. 5,5 (nach dem Wurz. Zeichen).
S. 89. Lin. 10. von unt. statt 1,76518 l. 1,765175.
S. 89. Lin. 9. von unten statt . . . 7. l. . . . 4.

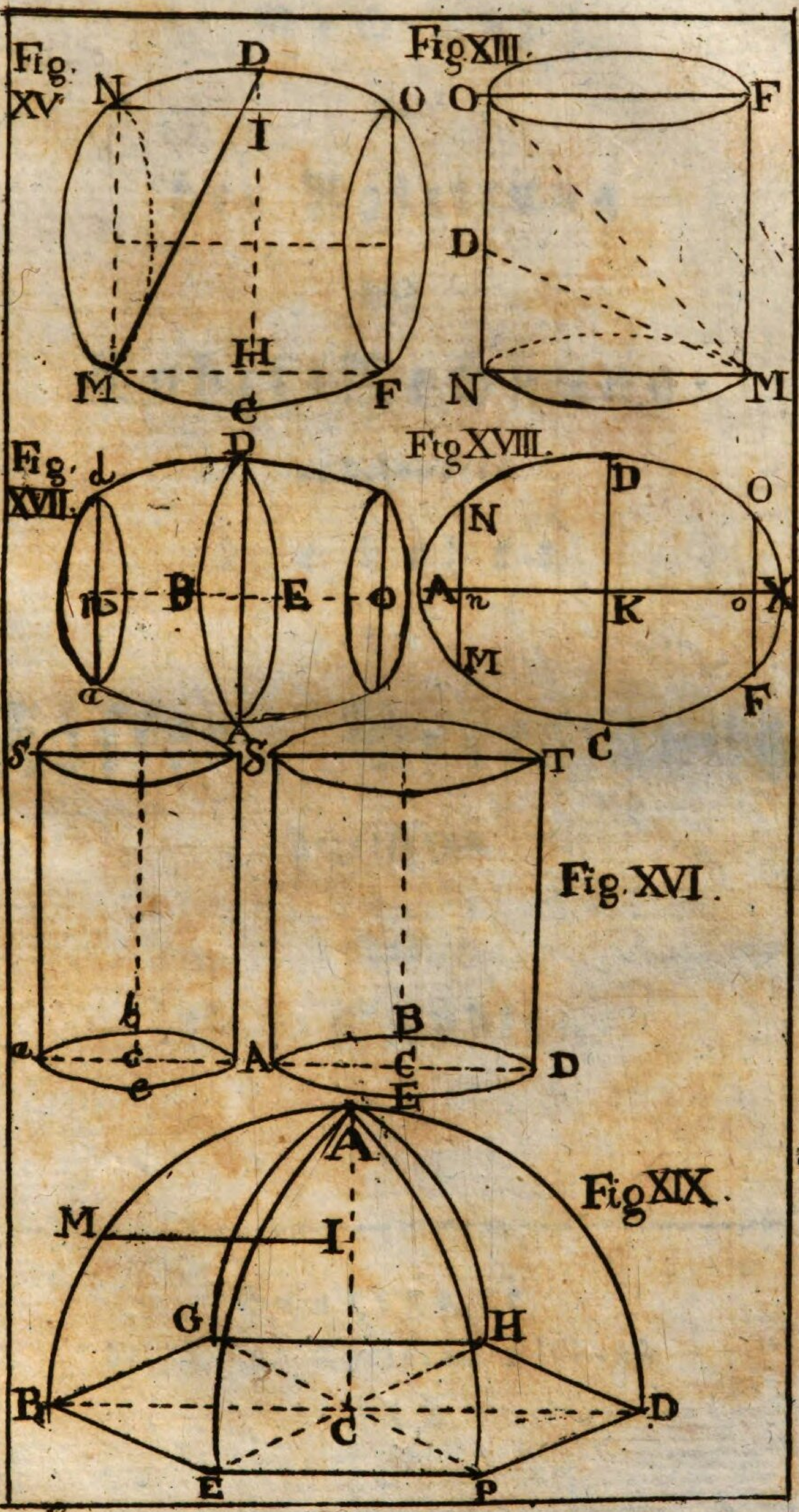
S. 125. unten statt $(AD')^2$ l. $(AD')^3$
S. 126. unten statt AD^3 — l. $AD^3 =$
S. 132. oben statt $\frac{206}{1331}$ l. $\frac{206}{225}$.
S. 145. Lin. 12. statt 0,783 l. 0,785.
S. 146, Lin. 10. von unten statt R^2: l. R^2.

Tab. I.



C. L. Schübler, Cub. R. und Stereom.

Tab. II.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schübler, Christian Ludwig,

Anleitung zur Cubik-Rechnung und zu deren Anwendung auf Körper-Ausmessungen

Stuttgart 1816

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 141
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346101-8